Емкости конденсаторов и симметризация в задачах об экстремальном разбиении и смежных вопросах геометрической теории функций

В.Н.Дубинин

Институт прикладной математики ДВО РАН
г.Владивосток

V Петрозаводская Международная конференция
„Комплексный анализ и приложения”

27 июня - 3 июля, 2010
Петрозаводск

Обобщенные конденсаторы

Пусть B - открытое множество на комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Обобщенным конденсатором в $\overline{B}$ назовем тройку $C = (B, \mathcal{E}, \triangle)$, где $\mathcal{E} = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ - совокупность замкнутых непустых попарно непересекающихся множеств $E_k \subset \overline{B}$, $k = 1, \ldots, n$, а $\triangle = \{\delta_k\}_{k=1}^{n}$ - совокупность вещественных чисел δ_k, $k = 1, \ldots, n$, $n \geq 2$. Открытое в $\overline{B}$ множество $\overline{B} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ будем называть *полем* конденсатора C, множества E_k - *пластинами* этого конденсатора, а числа δ_k - *уровнями потенциала* или, короче, *потенциалами пластин* E_k, $k = 1, \ldots, n$. Емкость $\operatorname{cap} C$ конденсатора C определяется как точная нижняя граница интегралов Дирихле $I(v, B \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k)$ по всем *допустимым функциям* v, т.е. вещественнозначным функциям v, непрерывным в $\overline{B}$, удовлетворяющим условию Липшица внутри множества B и равным δ_k на E_k, $k = 1, \ldots, n$. Если множество $(\partial B) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ пусто либо состоит из конечного числа аналитических кривых и существует функция u, непрерывная в $\overline{B}$, гармоническая в $\overline{B} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, равная δ_k на E_k, $k = 1, \ldots, n$, и такая, что $\partial u / \partial n = 0$ на $(\partial B) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, то указанную функцию будем называть *потенциальной функцией* конденсатора C, а сам конденсатор C - *допустимым.* С помощью конформного отображения эти определения распространяются на более широкий класс конденсаторов. В условиях теоремы П1 потенциальная функция существует и выполняется равенство

$$\operatorname{cap} C = I(u, B).$$

В дальнейшем слово "обобщенный" в названии конденсатора будем опускать. Очевидно

$$C = (E_0, E_1) \equiv (\overline{\mathbb{C}}, \{E_0, E_1\}, \{0, 1\}).$$

В случае, когда B - конечносвязная область на $\overline{\mathbb{C}}$ будем рассматривать также конденсаторы вида $C = (B, \mathcal{E}, \triangle)$, определенные как и выше, но с заменой множества $\overline{B}$ на $[B]$ - компактификацию области B посредством простых концов Каратеодори; граница $\partial[B]$ - совокупность простых концов. Под окрестностью в этом случае понимается любое открытое в $[B]$ множество, а пластины совокупности $\mathcal{E}$ суть замкнутые подмножества $[B]$. В приложениях важно различать достижимые граничные точки области B, имеющие один и тот же носитель. Для простоты изложения все утверждения в этом и последующих параграфах сформулированы в основном в терминах конденсаторов, определенных с топологией на комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Аналогичные утверждения имеют место для конденсаторов, заданных в $[B]$. Однако эти утверждения (а в основной части и их доказательства) совпадают по форме с соответствующими теоремами для конденсаторов в $\overline{B}$, и, поэтому, здесь не приводятся. Для читателя, незнакомого с теорией простых концов, поясним разницу между конденсаторами двух видов на следующем простом примере. Пусть B - единичный круг $|z| < 1$ с разрезом по радиусу $(0, 1)$, E_1 - дуга окружности $|z| = 1$ от точки i до точки -1, а E_2 - отрезок $[1/2, 1]$. Пусть f - конформное и однолистное отображение области B на круг $U := \{w : |w| < 1\}$, при котором дуге E_1 соответствует некоторая дуга α[1], верхнему краю отрезка $[1/2, 1]$ - дуга β, а нижнему краю - дуга γ окружности $|w| = 1$. Конденсатору $C = (B, \{E_1, E_2\}, \{0, 1\})$ в $\overline{B}$ соответствует при отображении f конденсатор $(U, \{\alpha, \beta \cup \gamma\}, \{0, 1\})$ равной ему емкости. В то же время, если $\widetilde{E}_2$ - верхний край отрезка $[1/2, 1]$, то конденсатору $\widetilde{C} = (B, \{E_1, \widetilde{E}_2\}, \{0, 1\})$ в $[B]$ соответствует конденсатор $(U, \{\alpha, \beta\}, \{0, 1\})$, причем $\operatorname{cap} C \neq \operatorname{cap} \widetilde{C}$.

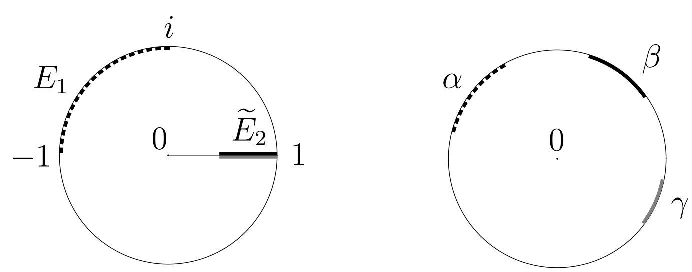

Рис. 1.

Аналогично конденсаторам с двумя пластинами на комплексной сфере определение конформной емкости допускает следующую ниже модификацию. Однако доказательство эквивалентности двух определений в общем случае требует дополнительных усилий.

Лемма 1. *Емкость конденсатора* $C = (B, \mathcal{E}, \triangle)$ *не изменится, если класс допустимых функций сузить до его подкласса всех функций, равных* δ_k *в некоторой окрестности* [2] *пластины* E_k, $k = 1, \dots, n$.

Простейшим и, в то же время, важным примером конденсатора является-

[1]т.е. при стремлении точки z из B к E_1 точка $f(z)$ стремится к α.

[2]под окрестностью в $\overline{B}$ понимается пересечение открытого в $\overline{\mathbb{C}}$ множества с $\overline{B}$.

ся четырехугольник с двумя отмеченными противоположными сторонами. *Четырехугольником* $(Q; a, b, c, d)$ называется односвязная область Q на комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}$ с четырмя различными граничными точками (простыми концами) a, b, c и d, расположенными в положительном направлении обхода границы Q. Указанные точки называются вершинами четырехугольника, а участки границы Q, заключенные между соседними вершинами (исключая сами вершины) - сторонами и обозначаются соответственно (a, b), (b, c), (c, d) и (d, a). Емкость конденсатора $(G, \{\overline{(a, b)}, \overline{(c, d)}\}, \{0, 1\})$ совпадает с конформным модулем четырехугольника $(Q; a, b, c, d)$ относительно сторон (a, b) и (c, d).

Рассмотрим сперва различные виды монотонности.

Теорема 1. *Если для конденсаторов* $C_1 = (B_1, \{E_{1k}\}_{k=1}^n, \triangle)$ *и* $C_2 = (B_2, \{E_{2k}\}_{k=1}^n, \triangle)$ *имеют место включения* $B_1 \subset B_2,\ E_{1k} \subset E_{2k},\ k = 1, \ldots, n,$ *то*

$$\operatorname{cap} C_1 \leq \operatorname{cap} C_2.$$

Доказательство. Пусть функция v допустима для конденсатора C_2. Тогда ее сужение v_1 на множество $\overline{B}_1$ допустимо для конденсатора C_1, причем

$$\operatorname{cap} C_1 \leq I(v_1, B_1) \leq I(v, B_2).$$

Осталось перейти к инфимуму по всевозможным допустимым функциям v. □

Условимся говорить, что множество B_2 получено при расширении множества B_1 за счет части границы $\gamma \subset \partial B_1$, если $B_1 \subset B_2$ и $(\partial B_1) \cap B_2$ принадлежит γ. Из предыдущей теоремы следует, что при расширении множества B за счет участков границы ∂B, не принадлежащих пластинам E_k, $k = 1, \ldots, n$, емкость конденсатора $C = (B, \{E_k\}_{k=1}^n, \triangle)$ не убывает. В случае расширения B за счет пластин имеем неравенство в другую сторону.

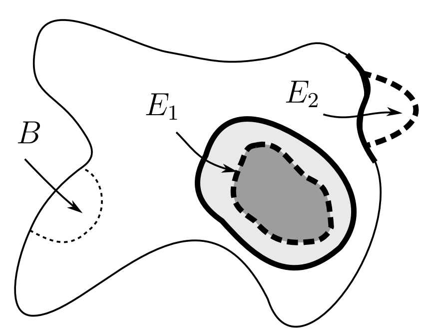

Рис. 2. Примеры уменьшения емкости конденсатора.

Теорема 2. *Пусть* $C_i = (B_i, \{E_{ik}\}_{k=1}^n, \triangle)$, $i = 1, 2$, *и пусть множество* B_2 *получено при расширении множества* B_1 *за счет участков границы* $E_{1k} \cap \partial B_1$, $k = 1, \ldots, n$, *причем каждая связная компонента множества* $\overline{B}_2 \setminus \overline{B}_1$ *имеет общие граничные точки не более чем с одной пластиной конденсатора* C_1. *Предположим, что пластины* $E_{2k} \subset E_{1k} \cup (\overline{B}_2 \setminus \overline{B}_1)$, $k = 1, \ldots, n$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\operatorname{cap} C_1 \geq \operatorname{cap} C_2.$$

Доказательство. Каждой допустимой функции v_1 конденсатора C_1, равной δ_k в окрестности пластины E_{1k}, $k = 1, \ldots, n$, сопоставим функцию v_2, построенную следующим образом. На множестве $\overline{B}_1$ $v_2 = v_1$. Далее, если связная компонента множества $\overline{B}_2 \setminus \overline{B}_1$ имеет общие граничные точки с пластиной E_{1k}, то полагаем $v_2 = \delta_k$ в этой связной компоненте. В остальных точках множества $\overline{B}_2$ пусть $v_2 = 0$. Нетрудно видеть, что функция v_2 допустима для конденсатора C_2 и

$$I(v_1, B_1) = I(v_2, B_2) \geq \operatorname{cap} C_2.$$

Осталось перейти к инфимуму по всевозможным функциям v_1. $\square$

Из конформной инвариантности интеграла Дирихле и граничных свойств однолистных функций вытекают различные виды конформной инвариантности емкости конденсатора $C = (B, \{E_k\}_{k=1}^n, \triangle)$. На практике в каждом конкретном случае сохранение емкости при конформном и однолистном отображении множества $B \setminus (\bigcup\limits_{k=1}^n E_k)$ легко устанавливается. Поэтому мы не приводим здесь эти утверждения. Отметим лишь, что если функция f конформна и однолистна на множестве B и доопределена на границе B в смысле граничного соответствия, то принято обозначение

$$f(C) = (f(B), \{f(E_k)\}_{k=1}^n, \triangle).$$

Остановимся подробнее на важных *принципах композиции конденсаторов.*

Теорема 3. *Пусть* B_i, $i = 1, \ldots, m$, *- попарно непересекающиеся открытые подмножества открытого множества* $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, *и пусть для конденсаторов* $C_i = (B_i, \{E_{ij}\}_{j=1}^{n_i}, \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{n_i})$, $i = 1, \ldots, m$, *и* $C = (B, \{E_k\}_{k=1}^n, \{\delta_k\}_{k=1}^n)$ *выполняется условие*: *любая пластина* E_{ij}, $1 \leq j \leq n_i$, *каждого конденсатора* C_i, $1 \leq i \leq m$, *принадлежит объединению пластин конденсатора* C, *имеющих тот же потенциал, что и* E_{ij}. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^m \operatorname{cap} C_i \leq \operatorname{cap} C.$$

Доказательство. Пусть v - допустимая функция конденсатора C. Сужения v_i этой функции на множества $\overline{B}_i$ допустимы для соответствующих конденсаторов $C_i,\ i=1,\dots,m$. Следовательно,

$$I(v,B)\geq\sum_{i=1}^{m}I(v_i,B_i)\geq\sum_{i=1}^{m}\operatorname{cap}C_i.$$

Завершает доказательство переход к нижней грани. □

Отметим полезное следствие теоремы 3. Величину, обратную емкости, иногда называют *модулем конденсатора*:

$$|C|:=\frac{1}{\operatorname{cap}C}.$$

Пусть $\lambda_i,\ 0\leq\lambda_i\leq 1,\ i=1,\dots,m,$ - вещественные числа, $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=1$. Учитывая выпуклость функции $y=1/x$, имеем

$$|C|\leq\left\{\sum_{i=1}^{m}|C_i|^{-1}\right\}^{-1}=\left\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(\lambda_i|C_i|)^{-1}\right\}^{-1}\leq\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2|C_i|.$$

Таким образом, в условиях теоремы 3 справедливо неравенство

$$|C|\leq\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2|C_i|$$

(ср. [Sol3 , с.19]).

Теорема 4. *Предположим, что конденсаторы* $C_i=(B_i,\{E_{ij}\}_{j=1}^{n_i},$ $\{\delta_{ij}\}_{j=1}^{n_i}),\ i=1,\dots,m,$ *и* $C=(B,\{E_k\}_{k=1}^{n},\{\delta_k\}_{k=1}^{n})$ *удовлетворяют следующим условиям:*
1) $\overline{B}=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\overline{B}_i$*;*
2) *если некоторая точка принадлежит множеству* $\overline{B}_i\cap\overline{B}_{i'},\ i\neq i'(i,i'=1,\dots,m)$*, то она принадлежит также пластинам конденсаторов* C_i *и* $C_{i'}$ *с равными потенциалами;*
3) *любая пластина* E_k *конденсатора* C *принадлежит объединению пластин конденсаторов* C_i*, имеющих тот же потенциал, что и* E_k*.*
Тогда

$$\sum_{i=1}^{m}\operatorname{cap}C_i\geq\operatorname{cap}C.$$

Доказательство. Пусть v_i - допустимая функция конденсатора C_i, равная δ_{ij} в окрестности пластины $E_{ij},\ j=1,\dots,n_i,\ i=1,\dots,m$. На множестве

$\overline{B}$ определим функцию $v(z)$, равную $v_i(z)$, если точка z принадлежит множеству $\overline{B}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Ввиду условия 2) функция v однозначна, а в силу условий 1)-3) и определения функций v_i она допустима для конденсатора C. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{m} I(v_i, B_i) = I(v, B) \geq \operatorname{cap} C.$$

Осталось перейти к инфимумам по всевозможным функциям v_i, $i = 1, \ldots, m$. Теорема доказана. □

Проиллюстрируем принципы композиции на следующих простых примерах.

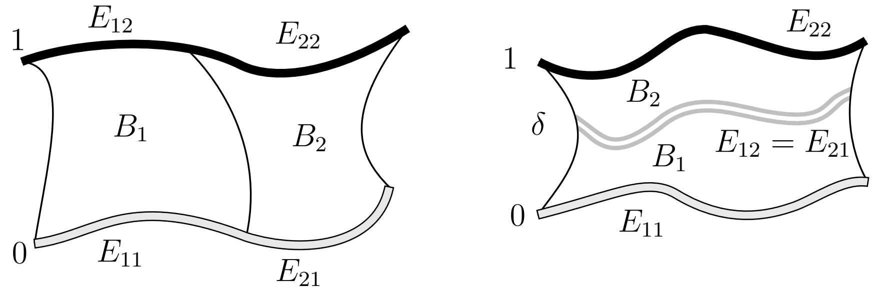

Рис. 3.

Слева представлена ситуация из теоремы 3. Здесь B есть объединение множеств B_1 и B_2 либо внутренность замыкания этого объединения, $E_1 = E_{11} \cup E_{21}$, $E_2 = E_{12} \cup E_{22}$. Согласно теореме 3

$$\operatorname{cap}(B, \{E_1, E_2\}, \{0, 1\}) \geq$$

$$\geq \operatorname{cap}(B_1, \{E_{11}, E_{12}\}, \{0, 1\}) + \operatorname{cap}(B_2, \{E_{21}, E_{22}\}, \{0, 1\}).$$

Полагая в правой части рисунка 4 множество B как и выше, имеем по теореме 4

$$\operatorname{cap}(B, \{E_{11}, E_{22}\}, \{0, 1\}) \leq$$

$$\leq \operatorname{cap}(B_1, \{E_{11}, E_{12}\}, \{0, \delta\}) + \operatorname{cap}(B_2, \{E_{21}, E_{22}\}, \{\delta, 1\})$$

при любом вещественном δ (ср. [Ahl, с.55, Рис. 4-2]).

В заключение приведем аналог принципа симметрии метода экстремальных метрик (ср. [Oht1, теорема 2.47]). Для открытого множества $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ введем обозначение $B^+ = \{z \in B : \operatorname{Im} z > 0\}$, а в случае замкнутого множества

E полагаем $E^{+} = \{z \in E : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Множество A называется симметричным относительно вещественной оси, если $A = \{z : \overline{z} \in A\}$. Конденсатор $C = (B, \mathcal{E}, \triangle)$ назовем симметричным относительно вещественной оси, если множество B и пластины совокупности $\mathcal{E}$ обладают указанной симметрией.

Теорема 5. *Если конденсатор* $C = (B, \{E_k\}_{k=1}^{n}, \{\delta_k\}_{k=1}^{n})$ *симметричен относительно вещественной оси, то*

$$\operatorname{cap} C = 2 \operatorname{cap} C^{+},$$

где $C^{+} = (B^{+}, \{E_k^{+}\}_{k=1}^{n}, \{\delta_k\}_{k=1}^{n})$.

Доказательство. Стандартными рассуждениями убеждаемся, что достаточно рассмотреть ситуацию, когда множества B и $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ ограничены конечным числом жордановых кривых. Привлекая в случае необходимости конформное отображение, можно считать, что граница множества $G := B \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ состоит из конечного числа аналитических кривых. В этих условиях обозначим через u потенциальную функцию конденсатора C. В силу единственности $u(z) \equiv u(\overline{z})$, т.е. функция u симметрична относительно вещественной оси. В частности, в точках множества $(\partial B^{+}) \cap G$ на вещественной оси имеем $\partial u / \partial n = 0$. Поэтому функция u является потенциальной для конденсатора C^{+}. Отсюда

$$\operatorname{cap} C = I(u, B) = 2I(u, B^{+}) = 2 \operatorname{cap} C^{+}.$$

Теорема доказана. $\square$

Ясно как формулируется принцип симметрии в случае произвольной прямой (вместо вещественной оси) и в случае, когда прямая заменятеся на окружность.

Упражнения

1. Убедиться, что из теоремы 3 вытекает следующий "принцип Гретша"(ср. [Gol, гл.IV, §6]). Пусть $Q_i,\ i = 1, \ldots, n$,- попарно непересекающиеся четырехугольники, лежащие в кольце $r < |z| < R$ так, что каждый из них имеет пару противоположных сторон, принадлежащих соответственно окружностям $|z| = r$ и $|z| = R$. Тогда для модулей MQ_i этих четырехугольников относительно указанных сторон справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} MQ_i \leq 2\pi / \log(R/r).$$

   Описать все случаи равенства в данном соотношении.

2. Показать, что теорема 4 содержит утверждение Гретша: для любых попарно непересекающихся двусвязных областей $G_i,\ i = 1, \ldots, n$, лежащих в кольце $G = \{z : r < |z| < R\}$ и разделяющих его граничные компоненты, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} MG_i \leq MG = \frac{1}{2\pi} \log(R/r)$$

Функции Грина, Робена и Неймана

В данном параграфе собраны определения и некоторые свойства функций, указанных в заглавии. Предположим, что для области B сферы Римана $\overline{\mathbb{C}}$ и точки $z_0 \in B,\ z_0 \neq \infty$, существует функция $g_B(z, z_0)$, непрерывная в $\overline{\mathbb{C}}$ и гармоническая в B, исключая точку z_0, обращающаяся в нуль вне B и такая, что функция

$$g_B(z, z_0) + \log|z - z_0|$$

гармоническая в окрестности z_0. Тогда функцию $g_B(z, z_0)$ называют (классической) *функцией Грина* области B с полюсом в точке z_0. В случае, когда $z_0 = \infty$, функция $g_B(z, \infty)$ определяется аналогично с той лишь разницей, что требуется гармоничность $g_B(z, \infty) - \log|z|$ в окрестности бесконечности. Область B, имеющую классическую функцию Грина, будем называть *допустимой*. Известно, что если каждая точка границы области B является концом некоторой жордановой дуги, лежащей вне B, то область B допустима [R]. Для произвольной области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ функция Грина определяется как предел

$$g_B(z, z_0) = \lim_{n \to \infty} g_{B_n}(z, z_0), \qquad z \in \overline{\mathbb{C}},$$

где $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ - исчерпание области B областями, имеющими классическую функцию Грина, т.е. $\overline{B_n} \subset B_{n+1},\ z_0 \in B_1$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = B$. Можно показать, что функция Грина не зависит от выбора исчерпания области B и совпадает с классической функцией Грина, если B имеет таковую. В случае, когда указанный выше предел равен бесконечности, говорят, что область B не имеет функции Грина [St]. Нетрудно убедится, что функция Грина $g_B(z, z_0)$ возрастает при расширении области B, положительная в $B \setminus \{z_0\}$ и обладает свойством симметрии:

$$g_B(z_1, z_2) = g_B(z_2, z_1) \text{ для любых } z_1, z_2 \in B.$$

Кроме того, функция Грина является инвариантом при конформном и однолистном отображении f, т.е.

$$g_{f(B)}(f(z), f(z_0)) = g_B(z, z_0), \quad z \in B \setminus \{z_0\}.$$

Для произвольного открытого множества B плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ под функцией Грина $g_B(z, z_0)$ будем понимать функцию Грина связной компоненты множества B, содержащей точку z_0. Если множество B имеет функцию Грина с полюсом в точке $z_0 \in B$, то оно имеет функцию Грина с полюсом в любой другой точке этого множества [St].

Внутренним радиусом открытого множества B относительно точки $z_0 \in B$ назовем величину

$$r(B, z_0) = \exp\{\lim_{z \to z_0} [g_B(z, z_0) + \log|z - z_0|]\}, \text{ когда } z_0 \neq \infty,$$

$$r(B, \infty) = \exp\{\lim_{z \to \infty} [g_B(z, \infty) - \log|z|]\}.$$

Если множество B не имеет функции Грина, то считаем, что $r(B, z_0) = +\infty$. Легко видеть, что для односвязной области гиперболического типа внутренний радиус совпадает с конформным радиусом [Gol]. Пусть E - замкнутое ограниченное подмножество плоскости $\mathbb{C}$, и пусть B - связная компонента дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$, содержащая точку $z = \infty$. Величину

$$\gamma = \log r(B, \infty) = \log r(\overline{\mathbb{C}} \setminus E, \infty)$$

называют *постоянной Робена* области B [Gol], [St], а число $\operatorname{cap} E = e^{-\gamma}$ - *логарифмической емкостью* множества E. Известно, что логарифмическая емкость $\operatorname{cap} E$ совпадает с *постоянной Чебышёва* $\tau(E)$ и с трансфинитным диаметром $d(E)$ множества E:

$$\operatorname{cap} E = \tau(E) = d(E) = 1/r(B, \infty)$$

(см. [Gol]). Из конформной инвариантности функции Грина следует, что если функция f конформно и однолистно отображает область B на область $f(B)$, то

$$r(B, z_0)|f'(z_0)| = r(f(B), f(z_0))$$

для любой точки $z_0 \in B$.

Перейдем теперь к определению функции Робена в случае области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, ограниченной конечным числом аналитических жордановых кривых. Пусть Γ - непустое замкнутое подмножество ∂B, состоящее из конечного числа невырожденных жордановых дуг, и пусть z_0 - конечная точка множества $\overline{B}\setminus\Gamma$. Обозначим через $g_B(z,z_0,\Gamma)$ вещественнозначную непрерывную функцию на $\overline{B}\setminus\{z_0\}$, гармоническую в $\overline{B}\setminus(\Gamma\cup\{z_0\})$ и удовлетворяющую следующим условиям:

$$g_B(z,z_0,\Gamma)=0 \quad \text{при} \quad z\in\Gamma,$$

$$\frac{\partial}{\partial n}g_B(z,z_0,\Gamma)=0 \quad \text{при} \quad z\in\partial B\setminus(\Gamma\cup\{z_0\}),$$

$g_B(z,z_0,\Gamma)+\log|z-z_0|$ - ограниченная гармоническая функция в окрестности точки z_0 ($\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к ∂B).

Если $z_0=\infty$, то функция $g_B(z,\infty,\Gamma)$ определяется аналогично с той лишь разницей, что требуется гармоничность $g_B(z,\infty,\Gamma)-\log|z|$ в окрестности бесконечности. При $z_0\in B$ функцию $g_B(z,z_0,\Gamma)$ называют *функцией Робена* области B с полюсом в точке z_0 [Dur]. Мы оставим за ней это название для любых точек $z_0\in\overline{B}\setminus\Gamma$. В случае, когда $\Gamma=\partial B$, функция Робена совпадает в области B с функцией Грина $g_B(z,z_0)$. Существование и единственность функции $g_B(z,z_0,\Gamma)$ в приведенных выше условиях легко проверяется.

Пусть теперь B - произвольная конечносвязная область комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$ без изолированных граничных точек. Под границей ∂B области B будем понимать совокупность простых концов. В дальнейшем, если это не вызовет недоразумений, носитель достижимой граничной точки и саму такую точку будем обозначать одной и той же буквой. Напомним, что граничная точка ζ области G называется достижимой граничной точкой, если ее можно соединить с какой-либо внутренней точкой области G некоторой непрерывной кривой $l:z=z(t),\ a\le t\le b$, целиком лежащей в G, кроме одного ее конца $\zeta=z(b)$. *Окрестность достижимой граничной точки* $U(\zeta,r,B)$ определим как связную компоненту пересечения $B\cap U(\zeta,r)$, содержащую некоторую открытую дугу кривой l с концом в точке $z(b), U(\zeta,r):=\{z:|z-\zeta|<r\}$. Две достижимые граничные точки ζ_1 и ζ_2 считаются различными, если существуют непересекающиеся окрестности $U(\zeta_k,r,B),\ k=1,2$. Будем говорить также, что подмножество области B *примыкает* к достижимой граничной точке ζ, если оно содержит некоторую окрестность этой точки $U(\zeta,r,B)$. Окрестность внутренней точки $\zeta\in B$ совпадает с обычным кругом $U(\zeta,r)\subset B$ при малых r. Запись $z\to\zeta$ означает направление, при котором каждая последующая точка принадлежит той же окрестности точки ζ, что и предыдущая.

Пусть функция f конформно и однолистно отображает область B на область $f(B)$, ограниченную конечным числом аналитических жордановых кривых в плоскости $\mathbb{C}$. Точку z_0 назовем *допустимой точкой области* B *с* *показателем* α, $0 < \alpha \leq 2$, если $z_0 \in B$ либо z_0 является достижимой граничной точкой области B и в некоторой окрестности этой точки справедливо разложение вида:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^{1/\alpha}(A + o(1)), \qquad z \to z_0, \tag{1}$$

где A - некоторая отличная от нуля постоянная. В случае $z_0 = \infty$ локальный параметр $z - z_0$ в разложении (1) необходимо заменить на $1/z$. Если $z_0 \in B$, $z_0 \neq \infty$, то разложение (1) автоматически выполняется с показателем $\alpha = 1$ и $A = f'(z_0)$. Понятно, что вид разложения (1) и значение α не зависят от выбора функции f. Таким образом, свойство допустимости точки z_0 не зависит от f, а зависит только от области B. В частности, если в некоторой окрестности точки $z_0 \neq \infty$ граница области B состоит из двух замкнутых аналитических дуг с общим концом в z_0, расположенных под внутренним по отношению к области B углом $\alpha\pi > 0$, то по теореме Лихтенштейна-Варшавского [Henr,c.359] точка z_0 допустима с показателем α. Пусть область B и функция f как выше, Γ - непустое замкнутое подмножество границы ∂B, состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент, и пусть z_0 - допустимая точка области B с показателем α, не принадлежащая Γ. Определим функцию Робена равенством

$$g_B(z, z_0, \Gamma) = \alpha g_{f(B)}(f(z), f(z_0), f(\Gamma)).$$

Данное определение не зависит от выбора функции f, поскольку при конформном и однолистном отображении "гладкой" области на "гладкую" сохраняется гармоничность, граничные условия и вид разложения в окрестности полюса. Легко видеть, что в окрестности конечной допустимой точки z_0 функция $g_B(z, z_0, \Gamma) + \log|z - z_0|$ гармоническая, а если $z_0 = \infty$, то гармонической является функция $g_B(z, z_0, \Gamma) - \log|z|$, как в случае функции Грина. Иногда функцию Робена можно выразить через функции Грина подходящих областей. Например, ввиду симметрии относительно вещественной оси функция Грина области $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ с полюсом в точке $z_0 < 0$ совпадает с функцией Робена $g_B(z, z_0, \Gamma)$, где $B = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ и $\Gamma = \{z = x + iy : x \geq 0, y = 0\}$. Легко проверить также равенство

$$g_{K(R)}(z, z_0, \gamma) = g_{K(R^2)}(z, R^2/\overline{z}_0) + g_{K(R^2)}(z, z_0),$$

где $\gamma = \{z : |z| = 1\}$. С другой стороны, пусть $G(z; R)$ - *функция Гретша*, конформно и однолистно отображающая кольцо $K(R)$, $R < \infty$, на внешность круга $|w| > 1$ с разрезом по вещественной положительной полуоси от некоторой точки $P(R)$ до бесконечности так, что $G(R;R)=P(R)$. Тогда для положительных z_0 имеем

$$g_{K(R)}(z,z_0,\gamma)=\log\left|\frac{1-G(z;R)G(z_0;R)}{G(z;R)-G(z_0;R)}\right|.$$

Радиусом Робена области B относительно точки z_0 и множества Γ назовем величину

$$r(B,\Gamma,z_0)=\exp\{\lim_{z\to z_0}[g_B(z,z_0,\Gamma)+\log|z-z_0|]\},\ \text{когда } z_0\neq\infty,$$

и

$$r(B,\Gamma,\infty)=\exp\{\lim_{z\to\infty}[g_B(z,\infty,\Gamma)-\log|z|]\}.$$

Если $z_0\in B$ и $\Gamma=\partial B$, то $r(B,\Gamma,z_0)=r(B,z_0)$. В случае, когда B - односвязная область, Γ - дуга ее границы и $z_0\in(\partial B)\setminus\Gamma$ величина $r(B,\Gamma,z_0)$ встречается в литературе под разными названиями и обозначениями. В общем случае эта величина мало изучена. При конформном и однолистном отображении f области B на гладкую область с разложением (1) в окрестности допустимой точки z_0 имеем

$$r(B,\Gamma,z_0)|A|^\alpha=r^\alpha(f(B),f(\Gamma),f(z_0)).$$

Как и выше вычисление радиусов Робена можно свести к нахождению внутренних радиусов либо функций Грина подобно определению функций Робена. Заметим так же, что если область B есть круговой сектор $\{z\in U:\varphi_1<\arg\, z<\varphi_2\}$, а $\Gamma=\{z:|z|=1,\varphi_1\leq\arg\, z\leq\varphi_2\}$, то $g_B(z,0,\Gamma)=-\log|z|$ и, следовательно,

$$r(B,\Gamma,0)=r(B,0)$$

независимо от выбора значений φ_1 и φ_2. Если круг в этом примере заменить на правильный многоугольник с центром в начале координат, круговой сектор заменить на сектор, высекаемый из многоугольника лучами $\arg\, z=\varphi_k,\ k=1,2$, а Γ на соответствующую часть границы многоугольника, то выписанное выше равенство будет иметь место лишь в случае, когда лучи проходят через его вершины.

Функция Неймана определяется в литературе различными способами (см., например, [Henr], [Dur]). Нам понадобится новое определение этой функции, включающее случай, когда ее полюса совпадают с достижимыми граничными точками. Пусть вновь область $B\subset\overline{\mathbb{C}}$ ограничена конечным числом аналитических жордановых кривых, и пусть z_0 и z^* - различные точки множества $\overline{B}$. *Функцией Неймана* области B с полюсами в точках z_0 и z^* назовем вещественнозначную функцию $n(z) = n_B(z, z_0, z^*)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$n(z)$ гармоническая в $\overline{B} \setminus \{z_0, z^*\}$;

$$\frac{\partial n(z)}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad z \in (\partial B) \setminus \{z_0, z^*\};$$

$n(z) + \log |z - z_0|$ - ограниченная гармоническая функция в некоторой окрестности точки z_0;

в окрестности точки z^* выполняется разложение

$$n(z) = \frac{\sigma(z_0)}{\sigma(z^*)} \log |z - z^*| + o(1),\ z \to z^*,\ z \in B,$$

где $\sigma(z) = 1$, если $z \in \partial B$ и $\sigma(z) = 2$ при $z \in B$ (в случае $z_0 = \infty$ ($z^* = \infty$) локальный параметр $z - z_0$ ($z - z^*$) необходимо заменить на $1/z$). Существование и единственность такой функции Неймана легко вытекает из известных утверждений в теории потенциала (см., например, [Henr, с.271]). В случае $B = \overline{\mathbb{C}}$ ($\partial B = \emptyset$) по определению считаем

$$n_{\overline{\mathbb{C}}}(z, z_0, z^*) = \log |(z - z^*)(z^* - z_0)/(z - z_0)|$$

при $z^* \neq \infty$ и

$$n_{\overline{\mathbb{C}}}(z, z_0, \infty) = -\log |z - z_0|.$$

Пусть теперь B - произвольная конечносвязная подобласть $\overline{\mathbb{C}}$ без изолированных граничных точек, и пусть функция f конформно и однолистно отображает область B на область $f(B)$, ограниченную конечным числом аналитических жордановых кривых. Пусть z_0 - допустимая точка области B с показателем α, а z^*- допустимая точка B с показателем α^*, отличная от z_0. Определим функцию Неймана равенством

$$n_B(z, z_0, z^*) = \alpha n_{f(B)}(f(z), f(z_0), f(z^*)) - \frac{\sigma(z_0)}{\sigma(z^*)} \log |A^*|^{\alpha^*},$$

где A^* - константа из разложения (1) функции f в окрестности точки z^*, $\sigma(z)$ - показатель допустимой точки z в случае $z \in \partial B$ и $\sigma(z) = 2$, если $z \in B$. В окрестности конечной точки z_0 функция $n_B(z, z_0, z^*) + \log |z - z_0|$ является ограниченной гармонической функцией, в то время как в окрестности z^* (пусть $z^* \neq \infty$) гармонической будет функция $n_B(z, z_0, z^*) - (\sigma(z_0)/\sigma(z^*)) \log |z - z^*|$. Функцию Неймана для полуплоскости легко построить из соображений симметрии. В самом деле, пусть $B = \{z : \operatorname{Im} z > 0\},\ z_0 \in B,\ z^* \in B,\ z_0 \neq z^*$. Функция

$$\log\left|\frac{(z-z^*)(z-\overline{z}^*)(z^*-z_0)(z^*-\overline{z}_0)}{(z-z_0)(z-\overline{z}_0)2\mathrm{Im}\, z^*}\right|$$

симметрична относительно вещественной оси (∂B). Следовательно, она совпадает с функцией Неймана $n_B(z, z_0, z^*)$. Сходным образом при $z_0 \in \partial B$ получаем

$$n_B(z, z_0, z^*) = \log\frac{|(z-z^*)(z-\overline{z}^*)|^{1/2}|z^*-z_0|}{|z-z_0||2\mathrm{Im}\, z^*|^{1/2}}.$$

Аналогично выписываются функции Неймана для круга.

В заключение определим величину $N(B, z_0, z^*)$, которая является своеобразным аналогом радиуса Робена, положив

$$N(B, z_0, z^*) = \exp\{\lim_{z\to z_0}[n_B(z, z_0, z^*) + \log|z-z_0|]\},\ \text{когда } z_0 \neq \infty,$$

и

$$N(B, \infty, z^*) = \exp\{\lim_{z\to\infty}[n_B(z, \infty, z^*) - \log|z|]\}.$$

Упражнения

1. Доказать равенство

$$\sigma(z_1)g_B(z_1, z_2, \Gamma) = \sigma(z_2)g_B(z_2, z_1, \Gamma),$$

Рассмотреть отдельно случаи, когда обе точки принадлежат области B; обе точки принадлежат границе B; и когда одна точка принадлежит B, а другая ее границе.

2. В условиях существования функции Робена $g_B(z, z_0, \Gamma)$ пусть $z_k,\ k = 1, \ldots, n$,- различные точки множества $\overline{B} \setminus \Gamma$, отличвные от z_0, и пусть $B(\rho) = B \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} U(z_k, \rho)$. Показать, что

$$g_{B(\rho)}(z, z_0, \Gamma) \rightrightarrows g_B(z, z_0, \Gamma)$$

внутри $B \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n}\{z_k\}$.

3. (Робинсон) Показать, что если множество E из упражнения (13) симметрично относительно вещественной оси, то

$$\mathrm{cap}\, E = \sqrt{2\,\mathrm{cap}\, F},$$

где F - проекция множества E на эту ось.

4. Убедиться, что функция Неймана внешности единичного круга имеет вид
$$\log \left| \frac{(z-z^*)(1-\overline{z}^* z)(z^*-z_0)(1-\overline{z}_0 z^*)}{(z-z_0)(1-\overline{z}_0 z)(1-|z^*|^2)} \right|, \quad |z_0|>1,\ |z^*|>1,\ z_0, z^* \neq \infty.$$
Какова будет функция Неймана в случае $z^*=\infty$? В случае $|z_0|=1$?

Асимптотика емкости конденсатора при вырождении некоторых его пластин

Рассмотрим асимптотику емкости конденсатора при наличии одной невырождающейся пластины и пластин, стягивающихся к внутренним и граничным точкам поля этого конденсатора.

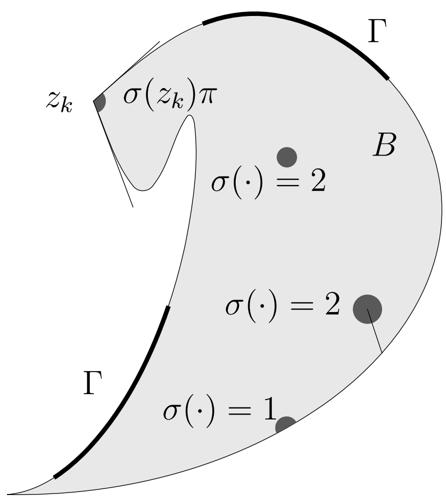

Рис. 4.

Пусть B - конечносвязная область комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$ без изолированных граничных точек; Γ - непустое замкнутое подмножество границы ∂B, состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент; $Z=\{z_k\}_{k=1}^n$ - совокупность различных допустимых точек области B $z_k \notin \Gamma,\ k=1,\dots,n$; $\triangle=\{\delta_k\}_{k=0}^n$ - совокупность вещественных чисел, $\delta_0=0$; и $\Psi=\{\psi_k\}_{k=1}^n$, где $\psi_k=\psi_k(r)\equiv\mu_k r^{\nu_k},\ \mu_k,\nu_k,\ k=1,\dots,n,$ - произвольные положительные числа. Пусть $D(z_k,\psi_k(r)),\ 0<r<r_0,\ k=1,\dots,n$,-асимптотически круговые семейства областей. При достаточно малом $r>0$ определен конденсатор
$$C(r;B,\Gamma,Z,\triangle,\Psi)=(B,\{E_k\}_{k=0}^n,\triangle),$$
где $E_0=\Gamma,\ E_k=\overline{D(z_k,\psi_k(r))}$, если $z_k\in B$, а в случае, когда z_k - достижимая граничная точка области B, под множеством E_k понимается замыкание в $[B]$[3] связной компоненты пересечения $B\cap D(z_k,\psi_k(r))$, примыкающей к точке $z_k,\ k=1,\dots,n$.

[3]См.параграф 1.3. В случае, когда пересечение $B\cap D(z_k,\psi_k(r))$ связно и ограничено жордановой кривой, указанное замыкание совпадает с обычным замыканием в $\overline{\mathbb{C}}$.

Теорема 6. *Пусть область B, множество $\Gamma \subset \partial B$ и совокупности $Z, \triangle, \Psi$ определены выше. Тогда*

$$\operatorname{cap} C(r; B, \Gamma, Z, \triangle, \Psi) = -\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(z_k)\delta_k^2}{\nu_k \log r} +$$

$$+R(B, \Gamma, Z, \triangle, \Psi) \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \ r \to 0,$$

где

$$R(B, \Gamma, Z, \triangle, \Psi) = -\pi \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(z_k)\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{r(B, \Gamma, z_k)}{\mu_k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{\sigma(z_k)\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} g_B(z_k, z_l, \Gamma) \right\},$$

$\sigma(z_k)$ - показатель допустимой точки z_k в случае $z_k \in \partial B$ и $\sigma(z_k) = 2$, если точка z_k принадлежит B, $k = 1, \ldots, n$.

Симметризация Штейнера

Введем обозначения: $P = P(a,b) := \{x+iy : a < x < b\}$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, и $l(x)$ - вертикальная прямая $\mathrm{Re}z = x$, $-\infty < x < +\infty$. Пусть B - открытое в $\overline{P}$ множество. *Симметризацией Штейнера множества B относительно вещественной оси* называется преобразование этого множества в симметричное множество $\mathrm{St}B$, определенное следующим образом:

$$\mathrm{St}\, B = \{x+iy : B \cap l(x) \ne \emptyset,\ 2|y| < m(B \cap l(x))\},$$

где $m(\cdot)$ - линейная мера Лебега. Результатом симметризации Штейнера замкнутого множества $E \subset \overline{P}$ называется множество

$$\mathrm{St}\, E = \{x+iy : E \cap l(x) \ne \emptyset,\ 2|y| \le m(E \cap l(x))\}.$$

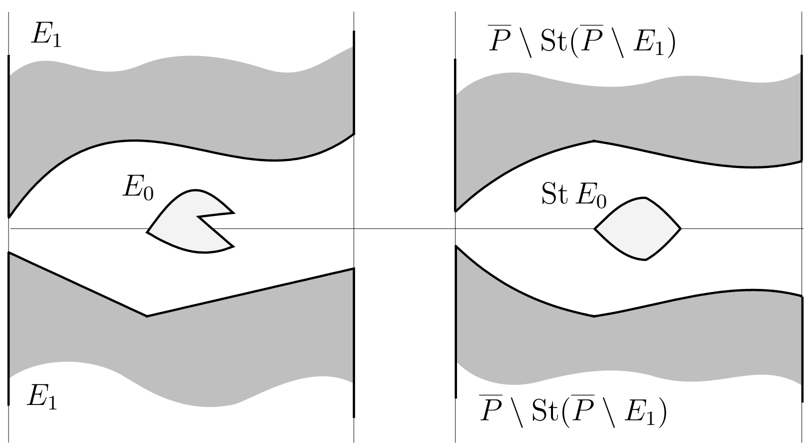

Рис. 5. Симметризация Штейнера.

Симметризация Штейнера в произвольном множестве $\varphi(\overline{P})$, полученном из $\overline{P}$ движением φ, определяется как суперпозиция $\varphi \circ \mathrm{St} \circ \varphi^{-1}$.

Пусть теперь $C = (P, \{E_0, E_1\}, \{0,1\})$ - произвольный конденсатор, для которого пластина E_1 содержит бесконечно удаленные точки. Положим

$$\mathrm{St}\, C = (P, \{\mathrm{St}\, E_0, \overline{P} \setminus \mathrm{St}(\overline{P} \setminus E_1)\}, \{0,1\}).$$

Следующий принцип симметризации восходит к Полиа и Сеге [PS].

Теорема 7. *Справедливо неравенство*

$$\operatorname{cap} C \geq \operatorname{cap} \operatorname{St} C. \tag{2}$$

Если, дополнительно, C - допустимый конденсатор со связным полем, то равенство в (2) *имеет место тогда и только тогда, когда этот конденсатор совпадает с конденсатором* $\operatorname{St} C$ *с точностью до сдвига вдоль мнимой оси.*

Задачи об экстремальном разбиении

Под задачами такого рода мы понимаем определение верхней грани сумм вида $\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \ldots + \alpha_n M_n$, где α_k - заданные положительные числа, а M_k - модули или приведенные модули попарно неналегающих областей B_k, удовлетворяющих определенным условиям, $k = 1, \ldots, n$. Экстремальная совокупность областей и образует "экстремальное разбиение". Простейший случай - две неналегающие области B_1 и B_2. Пусть $0 \in B_1$ и $\infty \in B_2$. Из леммы Гретша следует

$$M(B_1, \partial B_1, \{0\}, \{1\}, \{r\}) + M(B_2, \partial B_2, \{\infty\}, \{1\}, \{r\}) \leq 0, \tag{3}$$

причем знак равенства имеет место только в случае $B_1 = \{z : |z| < R\},\ B_2 = \{z : |z| > R\}$, где R - произвольная положительная постоянная. В литературе чаще встречается эквивалентная форма неравенства (3):

$$r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \leq |a_1 - a_2|^2, \qquad B_1 \cap B_2 = \emptyset. \tag{3'}$$

Этот результат Лаврентьева положил начало исследованию целого ряда задач об экстремальном разбиении, которые к настоящему времени имеют богатую историю [Kuz1, Kuz2]. Мы ограничимся здесь лишь некоторыми задачами для приведенных модулей открытых множеств B_k относительно внутренних либо граничных точек a_k. Результаты сформулируем в терминах внутренних радиусов, радиусов Робена, либо ввиде неравенств для квадратичных форм, коэффициенты которых зависят от функций Грина $g_{B_k}(z, a_k)$ и Робена $g_{B_k}(z, a_k, \Gamma_k)$. Весь материал разбит условно на три части: когда точки a_k фиксированы, когда они обладают определенной степенью свободы и когда задача сводится к оценке мебиусовых инвариантов. В первых двух случаях экстремальные задачи естественно называть задачами соответственно с фиксированными или свободными полюсами, поскольку точки a_k являются полюсами ассоциированного квадратичного дифференциала, а также полюсами функций Грина (Робена) рассматриваемых множеств.

Рассмотрим сначала следствия монотонности и принципов композиции конденсаторов.

Теорема 8. (Нехари) *Предположим, что области* B_k *попарно непересекаются и пусть точки* $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}},\ k = 1, \ldots, n\ (n \geq 2)$*. Тогда для любых вещественных чисел* $\delta_k,\ k = 1, \ldots, n,$ *удовлетворяющих условию* $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k = 0,$ *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} (r(B_k, a_k))^{\delta_k^2} \leq \prod_{k=1}^{n} {\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n}}' |a_k - a_l|^{-\delta_k \delta_l}.$$

Теорема 9. (Куфарев) *Если области* B_1 *и* B_2 *не пересекаются и лежат в круге* $|z| < 1$*, то для любых точек* $a_k \in B_k,\ k = 1, 2,$ *справедлива точная оценка*

$$r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \leq |a_2 - a_1|^2 [1 - |(a_2 - a_1)/(1 - \overline{a}_1 a_2)|^2].$$

Знак равенства имеет место в том случае, когда $\overline{B_1 \cup B_2} = \{z : |z| \leq 1\}$ *и общая граница областей* B_1 *и* B_2 *определяется уравнением*

$$|(z - a_1)/(1 - \overline{a}_1 z)| = |(z - a_2)/(1 - \overline{a}_2 z)|, \qquad |z| \leq 1.$$

Теорема 10. *Пусть* a_k, $k = 1, \ldots, n$, *- произвольные фиксированные различные точки в единичном круге* U *, и пусть* δ_k, $k = 1, \ldots, n$, *- фиксированные положительные числа,* $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k = 1$*. Тогда для любых попарно непересекающихся областей* $B_k, a_k \in B_k$, $k = 1, \ldots, n$, *лежащих в круге* U*, и любого конденсатора* C*, одна пластина которого содержит* $\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$*, а другая - внешность круга* U*, справедливо неравенство*

$$e^{2\pi |C|} \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{r(B_k, a_k)}{r(U, a_k)} \right]^{\delta_k^2} \leq \prod_{k=1}^{n} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \left| \frac{1 - \overline{a}_k a_l}{a_k - a_l} \right|^{\delta_k \delta_l}. \tag{4}$$

Если, дополнительно, области B_k *допустимые, а конденсатор* C *допустимый и правильный, то равенство в* (4) *имеет место в том и только в том случае, когда пара* $\{\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k, C\}$ *является разбиением круга* U *относительно точек* a_k *и чисел* δ_k.

Следствие. *Если для данных областей* B_1, B_2 *и точек* $a_1, a_2, a_k \in B_k \subset U$, $k = 1, 2$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, *существует конденсатор, одна пластина которого содержит* $B_1 \cup B_2$, *а другая -* $\mathbb{C} \setminus U$ *("прокладка"), причем модуль этого конденсатора не меньше, чем* $(1/2\pi)\log(1/\rho)$, $0 < \rho < 1$, $\rho + 1/\rho = 2|1 - \overline{a}_1 a_2|/|a_1 - a_2|$, *то справедливо точная оценка*

$$r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \leq \frac{1}{16}(1 - \rho^4)^2 |a_1 - a_2|^2.$$

Равенство для допустимых областей B_1, B_2 *имеет место лишь в случае совпадения их с областями, ограниченными кривой*

$$|(z - a_1)(z - a_2)| = \rho^2 |(1 - \overline{a}_1 z)(1 - \overline{a}_2 z)|.$$

Напомним, что для произвольной области B, имеющей функцию Грина $g_B(z, \zeta)$, выполняется $\log r(B, a) = h_B(a, a)$, где $h_B(z, \zeta) = g_B(z, \zeta) + \log|z - \zeta|$ - регулярная часть функции Грина. Таким образом, задача о максимуме, например, произведения $\prod_{k=1}^{n} (r(B_k, a_k))^{\alpha_k}$ равносильна задаче о максимуме суммы

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_{B_k}(a_k, a_k).$$

Желая рассмотреть характеристику, учитывающую последующие члены в разложении функции Грина, введем симметрическую разность

$$H(B, z, \zeta) = h_B(z, z) + h_B(\zeta, \zeta) - 2h_B(z, \zeta).$$

Можно показать, что для любой точки $z_0 \in B$ и для любого вещественного числа φ существует предел

$$\lim_{\rho \to 0} H(B, z_0 - \rho e^{i\varphi}, z_0 + \rho e^{i\varphi})/\rho^2 := -4\pi K(B, z_0, \varphi),$$

причем

$$K(B, z_0, \varphi) = K(z_0, \overline{z}_0) - \operatorname{Re}[e^{2\varphi i} l(z_0, z_0)],$$

где $K(z, \overline{\zeta})$ и $L(z, \zeta) = 1/[\pi(z - \zeta)^2] - l(z, \zeta)$ - известные в теории функций ядра. Величина $K(B, z_0, \varphi)$ неотрицательная и не возрастает при расширении области B. Естественно рассмотреть задачу о минимуме суммы

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k K(B_k, a_k, \varphi_k)$$

по всевозможным попарно непересекающимся областям B_k и при некоторых ограничениях на α_k, a_k и $\varphi_k,\ k = 1, \dots, n$.

Теорема 11. (Аленицын) *Для любых попарно непересекающихся областей B_k, точек $a_k, a_k \in B_k$, положительных чисел α_k и вещественных чисел $\varphi_k,\ k = 1, \dots, n,\ n \geq 2$, справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k K(B_k, a_k, \varphi_k) \geq \frac{1}{\pi} \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{\sqrt{\alpha_k \alpha_l} e^{i(\varphi_k + \varphi_l)}}{(a_k - a_l)^2}.$$

Следствие. *В условиях теоремы 11 для любых комплексных чисел $\beta_k,\ k = 1, \dots, n$, справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 l(a_k, a_k) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{\beta_k \beta_l}{(a_k - a_l)^2} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \beta_k \overline{\beta}_k K(a_k, \overline{a}_k),$$

где $K(z, \overline{a}_k),\ l(z, a_k)$ - ядра Бергмана первого и второго рода области B_k относительно класса всех функций, регулярных и с интегрируемым квадратом модуля в ней, $k = 1, \dots, n$.

Следующие ниже утверждения общего характера указывают на связь между задачами об экстремальном разбиении для приведенных модулей относительно внутренних точек и задачами о разбиении на полосы и полуполосы. *Полосой* называется односвязная область гиперболического типа с двумя отмеченными различными достижимыми граничными точками, называемыми *вершинами*. Будем рассматривать только те полосы P, у которых вершины a_1 и a_2 обладают следующим свойством. Если функция $w = f(z)$ конформно и однолистно отображает P на прямолинейную полосу $\{w : 0 < \mathrm{Re}\, w < 1\}$ так, что $f(a_1) = -i\infty,\ f(a_2) = +i\infty$, то в окрестности каждой точки a_k справедливо разложение

$$f(z) = \frac{(-1)^{k+1} i}{\varphi_k \pi} \log(z - a_k) + c_k + o(1), \quad z \to a_k, \tag{5}$$

где $\varphi_k > 0$ и c_k - постоянные, $k = 1, 2$ (в случае $a_k = \infty$ локальный параметр $z - a_k$ заменяем на $1/z$). Ясно, что $\varphi_k \pi$ - внутренний угол области P в точке $a_k,\ k = 1, 2$. Траектория полосы P определяется как прообраз любой прямой $\mathrm{Re}\, w = u,\ 0 < u < 1$, при отображении f. Следуя [11,12], *приведенным модулем области P* назовем величину

$$M(P) = \mathrm{Im}(c_2 - c_1).$$

Аналогично, *полуполоса* это односвязная область гиперболического типа P, $P \subset \overline{\mathbb{C}}$, с тремя отмеченными различными достижимыми граничными точками a_1, a_2 и a_3, расположенными в положительном направлении обхода границы P, одна из которых (пусть a_1) называется *вершиной*. Рассматриваем только те полуполосы P, у которых вершина a_1 обладает следующим свойством. Если функция $w = f(z)$ конформно и однолистно отображает область P на прямолинейную полуполосу $\{w : 0 < \operatorname{Re} w < 1, \ \operatorname{Im} w < 0\}$ так, что $f(a_1) = -i\infty$, $f(a_2) = 1$, $f(a_3) = 0$, то в окрестности точки a_1 выполняется разложение (5) при $k = 1$. Следуя [13], *приведенный модуль полуполосы* P определяем как

$$M(P) = -\operatorname{Im} c_1.$$

В работе [13] фигурирует эквивалентное понятие приведенного модуля треугольника (а не полуполосы), что, на наш взгляд, менее точно, так как треугольник предполагает наличие трех угловых точек, а не одной, как в нашем случае. Траекторию полуполосы P определим как прообраз любой полупрямой $\operatorname{Re} w = u$, $\operatorname{Im} w \leqslant 0$, $0 < u < 1$, при отображении f. В частности, траектория содержит соответствующий граничный элемент на "стороне" a_2a_3. Число φ_k в разложении (5) в случае полосы ($k = 1, 2$) либо полуполосы ($k = 1$) назовем *показателем вершины* z_k области P.

Рассмотрим совокупность различных точек $\{a_k\}_{k=1}^n$ на сфере $\overline{\mathbb{C}}$ и конечную совокупность попарно непересекающихся полос и полуполос $\{P\}$, носители вершин которых расположены в точках из $\{a_k\}_{k=1}^n$ так, что каждая точка a_k является носителем некоторой вершины. Обозначим через a_{kl}, $l = 1, \ldots, m_k$, все вершины областей из $\{P\}$, для которых точка a_k является носителем, $k = 1, \ldots, n$. Пусть φ_{kl} - показатель вершины a_{kl}, а P_{kl} - область с вершиной a_{kl}, $l = 1, \ldots, m_k$, $k = 1, \ldots, n$. Ясно, что при такой нумерации полосы учитываются дважды, а полуполосы - один раз.

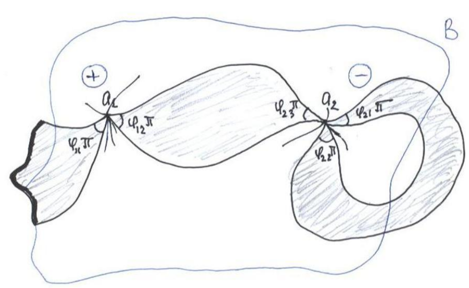

Рис. 6.

Теорема 12. *Пусть совокупности $\{a_k\}_{k=1}^n$ и $\{P\}$ определены выше, B - открытое множество на сфере $\overline{\mathbb{C}}$, содержащее точки $a_k,\ k=1,\dots,n$, и пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ - произвольная совокупность вещественных чисел. Предположим, что выполняются следующие условия:*

1) $\sum\limits_{l=1}^{m_k} \varphi_{kl} = 2,\ \ k=1,\dots,n;$
2) *для любой полосы P_{kl} совокупности $\{P\}$ справедливо равенство $|x_k\varphi_{kl}| = |x_{k'}\varphi_{k'l'}|$, где φ_{kl} и $\varphi_{k'l'}$ - показатели вершин этой полосы;*
3) *если P_{kl} - либо полуполоса, либо полоса с вершинами a_{kl} и $a_{k'l'}$, причем $x_k x_{k'} > 0$, то ни одна из траекторий области P_{kl} не принадлежит множеству B, $1 \le l, l' \le m_k$, $1 \le k, k' \le n$.*

Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \log r(B, a_k) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n} x_k x_l g_B(a_k, a_l) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \left[\frac{\pi}{2} \sum_{l=1}^{m_k} \lambda_{kl} \varphi_{kl}^2 M(P_{kl}) \right],$$

где $\lambda_{kl} = 1/2$, если P_{kl} - полоса, и $\lambda_{kl} = 1$, если P_{kl} - полуполоса.

Теорема 13. *Пусть в условиях теоремы 12 множество B есть объединение конечного числа попарно непересекающихся конечносвязных областей без изолированных граничных точек, и пусть Γ - непустое замкнутое подмножество границы ∂B, состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент и удовлетворяющие условию:*

$$\bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{l=1}^{m_k} P_{kl} \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus ((\partial B) \setminus \Gamma).$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \log r(B_k, \Gamma_k, a_k) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n} x_k x_l g_{B_k}(a_l, a_k, \Gamma_k) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \left[\frac{\pi}{2} \sum_{l=1}^{m_k} \lambda_{kl} \varphi_{kl}^2 M(P_{kl}) \right],$$

где B_k - связная компонента множества B, содержащая точку a_k, $\Gamma_k = \Gamma \cap (\partial B_k)$ и функция Робена $g_{B_k}(z, a_k, \Gamma_k)$ доопределена нулем вне B_k, $k = 1,\dots,n$.

Распространим теорему 13 на случай граничных точек a_k, при этом ограничимся лишь одной областью, не желая усложнять существа вопроса. Пусть B - конечносвязная область коплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$ без изолированных граничных точек. Рассмотрим совокупность $\{a_k\}_{k=1}^n$ различных допустимых точек области B и конечную совокупность $\{P\}$ попарно непересекающихся полос и полуполос в $\overline{\mathbb{C}}$, обладающих следующим свойством. При всех достаточно малых $r > 0$ окрестность $U(z, r, P)$ любой вершины z любой области P из $\{P\}$ принадлежит некоторой окрестности $U(a_k, r, B),\ 1 \leq k \leq n$, и, наоборот, в любой окрестности $U(a_k, r, B)$ содержится некоторая окрестность $U(z, r, P)$ вершины z области $P \in \{P\}$. В частности, носители достижимых точек z и a_k совпадают. (Определения окрестностей даны в §2.1.) Обозначим через $a_{kl},\ l = 1, \ldots, m_k$, все вершины областей $P \in \{P\}$, подходящие окрестности которых лежат в окрестности $U(a_k, r, B)$ при достаточно малых r, а через φ_{kl} - показатель вершины $a_{kl},\ l = 1 \ldots, m_k,\ k = 1, \ldots, n$.

Теорема 14. *Пусть область B и совокупности $\{a_k\}_{k=1}^n,\ \{P\}$ определены выше, Γ - непустое замкнутое подмножество границы ∂B, состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент, и пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ - совокупность вещественных чисел. Предположим, что точки $a_k \notin \Gamma,\ k = 1, \ldots, n$, области P из совокупности $\{P\}$ не пересекаются с частью границы $(\partial B) \setminus \Gamma$ и выполняются следующие условия:*

1) $\sum\limits_{l=1}^{m_k} \varphi_{kl} = \sigma(a_k), \qquad k = 1, \ldots, n;$

2) *для любой полосы P_{kl} совокупности $\{P\}$ справедливо равенство $|x_k\varphi_{kl}| = |x_{k'}\varphi_{k'l'}|$, где φ_{kl} и $\varphi_{k'l'}$ - показатели вершин этой полосы;*

3) *если P_{kl} - либо полуполоса, либо полоса с вершинами a_{kl} и $a_{k'l'}$, причем $x_k x_{k'} > 0$, то ни одна из траекторий области P_{kl} не принадлежит множеству $B,\ 1 \leq l, l' \leq m_k,\ 1 \leq k, k' \leq n$.*

Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sigma(a_k) \log r(B, \Gamma, a_k) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} x_k x_l \sigma(a_k) g_B(a_k, a_l, \Gamma) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \left[\pi \sum_{l=1}^{m_k} \lambda_{kl} \varphi_{kl}^2 M(P_{kl}) \right],$$

где λ_{kl} как в теореме 12.

Классическое условие неналегания областей в задачах об экстремальном разбиении заменяется в теоремах 12–14 на условие "непокрытия" траекторий или вовсе снимается. Например, если в теореме 12 взять две конечные точки a_1 и a_2 ($n = 2$), единственную полосу $P = \overline{\mathbb{C}} \setminus [a_1, a_2]$ с вершинами в точках a_1, a_2 и $x_1 = x_2 = 1$, то неравенство теоремы означает, что результат Лаврентьева ($3'$) имеет место также в случае, когда любая дуга окружности с концами в точках a_1 и a_2 не принадлежит $B = B_1 \cup B_2$. Более того, при этих ограничениях выполняется

$$r(B, a_1) r(B, a_2) \exp(2 g_B(a_1, a_2)) \leq |a_1 - a_2|^2.$$

Далее, пусть $\{\gamma\}$ - совокупность всех окружностей, проходящих через точки a_1 и a_2. Обозначим через B_1^* множество всех точек области B_1, $a_1 \in B_1$, которые можно соединить с точкой a_1 дугой окружности $\gamma \in \{\gamma\}$, целиком лежащей в B_1 и не проходящей через a_2. Аналогично, B_2^* - множество всех точек B_2, $a_2 \in B_2$, которые можно соединить с a_2 дугой окружности $\gamma \in \{\gamma\}$, лежащей в B_2 и не пересекающей точку a_1. Применяя теорему 13 для подходящего разбиения полосы $P = \overline{\mathbb{C}} \setminus [a_1, a_2]$ на полуполосы, вновь приходим к неравенству ($3'$), но при более слабом ограничении:

$$B_1^* \cap B_2^* = \emptyset.$$

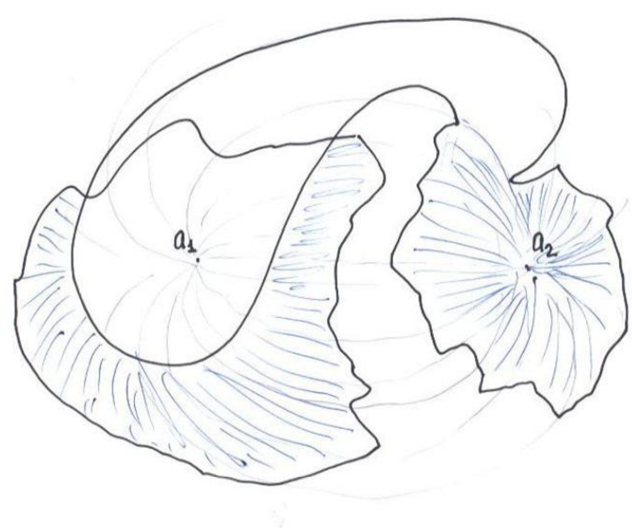

Рис. 7.

Следствие. *Пусть G - область сферы $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченная конечным (возможно нулевым) числом простых замкнутых аналитических кривых. Пусть $Q(z)dz^2$ - положительный квадратичный дифференциал на G, регулярный всюду, за исключением m простых полюсов и n полюсов второго порядка $a_1, \ldots, a_n$, в окрестностях которых в терминах некоторого локального параметра, изображающего a_k как точку $z = 0$, имеют место разложения*

$$Q(z)dz^2 = \left(-\frac{x_k^2}{z^2} + \ldots\right) dz^2,$$

где $x_k \neq 0,\ k = 1, \ldots, n$, - вещественные числа ($m \geq 0,\ n \geq 1$, множество простых полюсов может быть пустым). Пусть G является внутренним замыканием круговых областей $G_1, \ldots, G_n$, соответствующих полюсам $a_1, \ldots, a_n$. Предположим, что открытое множество $B \subset G$ содержит точки $a_k,\ k = 1, \ldots, n$, и не содержит ортогональных траекторий квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$ с предельными концевыми точками $a_k, a_{k'}$, для которых $x_k, x_{k'} > 0,\ 1 \leq k, k' \leq n$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \log\, r(B, a_k) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} x_k x_l g_B(a_k, a_l) \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \log\, r(G_k, a_k). \qquad (6)$$

Знак равенства в (6) имеет место в случае $B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k$ при любых значениях $x_k,\ k = 1, \ldots, n$.

В отличие от известных утверждений об экстремальном разбиении, данное следствие является, по существу, "теоремой покрытия". Кроме того, для некоторых квадратичных дифференциалов обнаруживается эффект разрыва областей, т.е. если связная компонента множества B может содержать несколько точек a_k, то в экстремальном случае каждая компонента G_k содержит лишь одну точку a_k. Поясним это на примере квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^4 + 6z^2 + 1}{z^2(z^2 - 1)^2} dz^2.$$

Он регулярен всюду на $\overline{\mathbb{C}}$, за исключением полюсов второго порядка в точках $z = 0, z = \infty$ и $z = \pm 1$. Легко определить структуру траекторий квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$, из которой видно, что он не имеет ортогональных траекторий с одним концом в точке $z = 0$, а другим - в $z = \infty$. Пусть области $B_k,\ k = 1, \ldots, 4$, содержат соответственно точки $z = 0,\ z = \infty,\ z = 1,\ z = -1$ и попарно не пересекаются, за исключением, быть может, областей B_1 и B_2. Из следствия вытекает неравенство

$$\sqrt{r(\widetilde{B},0)r(\widetilde{B},\infty)}r(B_3,1)r(B_4,-1)\exp(g_{\widetilde{B}}(0,\infty)) \leq 8(\sqrt{2}-1)^{2\sqrt{2}},$$

где $\widetilde{B} = B_1 \cup B_2$.

Если множество B является объединением n попарно непересекающихся односвязных областей $B_k,\ a_k \in B_k,\ k = 1,\dots,n$, и не содержит полюсов первого порядка, то условия следствия заведомо выполняются и неравенство (6) имеет вид

$$\prod_{k=1}^{n}(r(B_k,a_k))^{x_k^2} \leq \prod_{k=1}^{n}(r(G_k,a_k))^{x_k^2}. \tag{7}$$

Данный результат установлен Дженкинсом из "общей теоремы о коэффициентах" [J]. Как известно, в ряде частных случаев удается найти точное выражение правой части неравенства (6) ((7)). Это обстоятельство приводит к уточнению соответствующих оценок Лаврентьева, Голузина, Куфарева и Фалес, Колбиной и других математиков, полученных для неналегающих областей. Покажем это на примере результата Голузина о трех неналегающих односвязных областях в $\overline{\mathbb{C}}$ [Gol, гл.IV, §4]. Пусть $B_k,\ k = 1,2,3$, - произвольные односвязные области на сфере $\overline{\mathbb{C}}$, содержащие точки $a_k \in B_k,\ k = 1,2,3$, и пусть $B = \bigcup\limits_{k=1}^{3} B_k$. Имея ввиду дробно-линейные автоморфизмы комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$, можно считать, что $a_k = \exp(2\pi i(k-1)/3),\ k = 1,2,3$. Положим в следствии область $G = \overline{\mathbb{C}}$ и

$$Q(z)dz^2 = \frac{-9z}{(z^3-1)^2}dz^2.$$

Области $G_k,\ k = 1,2,3$, представляют собой углы, ограниченные лучами $\arg z^3 = \pi$. Если выполняется неравенство (6) с числами $x_k,\ |x_k| = 1,\ k = 1,2,3$, то

$$\left[\prod_{k=1}^{3} r(B,a_k)\right]\exp\{2x_1x_2g_B(a_1,a_2)+$$

$$+2x_2x_3g_B(a_2,a_3)+2x_3x_1g_B(a_3,a_1)\} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \tag{8}$$

с равенством в случае $B = \bigcup\limits_{k=1}^{3} G_k$. Введем обозначения: $\widetilde{B}_{2k-1}$ - связная компонента множества $\{z \in B : 2\pi(k-1)/3 < \arg z < 2\pi k/3\}$, для которой точка a_k является граничной, $k = 1,2,3$; $\widetilde{B}_{2k-2}$ - связная компонента множества

$\{z \in B : 2\pi(k-2)/3 < \arg z < 2\pi(k-1)/3\}$, для которой a_k - граничная точка, $k = 2, 3, 4$ $(a_4 = a_1)$. Предположим, что $\widetilde{B}_1 \cap \widetilde{B}_2 = \widetilde{B}_3 \cap \widetilde{B}_4 = \widetilde{B}_5 \cap \widetilde{B}_6 = \emptyset$. Тогда выполняются условия следствия с $x_k = 1$, $k = 1, 2, 3$ и мы имеем неравенство (8). Если только одно из пересечений, например, $\widetilde{B}_1 \cap \widetilde{B}_2 = \emptyset$, то вновь справедливо неравенство (8), но уже с $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Напомним, что Голузин доказал (8) в случае, когда $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, и при условии, что области B_k, $k = 1, 2, 3$, попарно не пересекаются.

В качестве полос совокупности $\{P\}$ из теоремы 12 можно брать полосообразные области квадратичных дифференциалов, являющихся полными квадратами. Следующее утверждение уточняет теорему Нехари.

Следствие. *Пусть a_k, $k = 1, \ldots, n$, - различные конечные точки плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, а δ_k и x_k, $k = 1, \ldots, n$, - вещественные числа, удовлетворяющие условиям $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = 0$, $|\delta_k| = |x_k| \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$ $(n \geq 2)$. Предположим, что открытое множество $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ содержит точки a_k, $k = 1, \ldots, n$, и не содержит траекторий квадратичного дифференциала*

$$Q(z)dz^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k}{z - a_k}\right)^2 dz^2$$

с предельными концевыми точками $a_k, a_{k'}$, для которых $x_k x_{k'} > 0$, $1 \leq k, k' \leq n$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \log r(B, a_k) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} x_k x_l g_B(a_k, a_l) \leq -\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \delta_k \delta_l \log |a_k - a_l|.$$

Знак равенства имеет место в случае, когда $x_k = \delta_k$, $k = 1, \ldots, n$, и множество

$$B = \left\{ z : \sum_{k=1}^{n} \delta_k \log |z - a_k| \neq c \right\},$$

где c - произвольная вещественная постоянная.

Заметим, что разным концам траектории полосообразной области квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$ соответствуют числа δ_k разных знаков. Поэтому, в случае $x_k = \delta_k$, $k = 1, \ldots, n$, условия следствия заведомо выполняются. В частности, если множество B состоит из попарно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k$, $k = 1, \ldots, n$, то следствие дает неравенство Нехари.

В заключение приведем некоторые результаты для радиусов Робена неналегающих областей. Всюду ниже рассматриваются только конечносвязные области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ без изолированных граничных точек и непустые замкнутые подмножества Γ границы ∂B, состоящие из конечного числа невырожденных связных компонент.

Теорема 15. *Для любых областей B_k, множеств Γ_k и точек a_k, удовлетворяющих условиям*

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset,\ a_k \in B_k \subset U,\ (\partial B_k) \cap U \subset \Gamma_k \subset \partial B_k,\ k = 1, 2,$$

справедливо неравенство

$$r(B_1, \Gamma_1, a_1) r(B_2, \Gamma_2, a_2) \leq |a_2 - a_1|^2 \left[1 - |(a_2 - a_1)/(1 - \overline{a_1} a_2)|^2\right]^{-1}.$$

Равенство для любых фиксированных точек a_1 и a_2 круга U достигается в том случае, если $\overline{B_1 \cup B_2} = \overline{U}$ и общая граница областей B_1 и B_2 совпадает с $\Gamma_1 = \Gamma_2$ и является неевклидовой прямой, ортогональной отрезку неевклидовой прямой, соединяющему точки a_1 и a_2, и делящей этот отрезок пополам.

Теорема 15′. *Для любых областей B_k, множеств Γ_k и точек a_k, удовлетворяющих условиям*

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset,\ a_k \in B_k \subset K,\ (\partial B_k) \cap K \subset \Gamma_k \subset \partial B_k,\ k = 1, 2,$$

справедливо неравенство

$$r(B_1, \Gamma_1, a_1) r(B_2, \Gamma_2, a_2) \leq \frac{|T(|a_2|) - T(-|a_1|)|^2}{|T'(|a_2|) T'(-|a_1|)|}.$$

Равенство достигается, например, в случае, когда $a_1 < 0,\ a_2 > 0,\ \overline{B_1 \cup B_2} = \overline{K}$, а общая граница областей B_1 и B_2 совпадает с $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \{z \in \overline{K} : |T(z) - T(a_1)| = |T(z) - T(a_2)|\}$.

Упражнения

1. Доказать неравенство Дюрена–Шиффера:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \alpha_l \alpha_k \log |a_l - a_k| + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \log r(B_k, a_k) \leq s^2 \log R,$$

где $\alpha_k,\ k = 1, \ldots, n,$ - произвольные вещественные числа, $s = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k,\ B_k,$ $k = 1, \ldots, n$, - попарно неналегающие односвязные области, лежащие в дополнении к некоторой области $\Omega, \infty \in \Omega,\ \mathrm{cap}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega) = R.$

2. (Колбина) Показать, что для любых конечных различных точек a_1, a_2, любых различных положительных чисел α и β и любых непересекающихся односвязных областей B_1 и B_2, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, справедливо неравенство

$$(r(B_1, a_1))^\alpha (r(B_2, a_2))^\beta \le \frac{4^{\alpha+\beta}\alpha^\alpha\beta^\beta}{|\alpha-\beta|^{\alpha+\beta}} \left|\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}\right|^{2\sqrt{\alpha\beta}} |a_1 - a_2|^{\alpha+\beta}.$$

Указание: рассмотреть при $\alpha < \beta$ квадратичный дифференциал

$$-\frac{(a_2-a_1)[z-a_1-\alpha(a_2-a_1)/(\alpha-\beta)]}{(z-a_1)^2(z-a_2)^2}dz^2$$

и применить следствие.

3. Доказать, что для любых попарно непересекающихся областей B_1, B_2 и B_3 сферы $\overline{\mathbb{C}}$, содержащих точки соответственно $0, -i$ и i, и для любого числа α, $0 < \alpha < 2$, справедливо неравенство

$$(r(B_1, 0))^{\alpha^2} r(B_2, -i) r(B_3, i) \le 2^{\alpha^2+6}\alpha^{\alpha^2}(2-\alpha)^{-(2-\alpha)^2/2}(2+\alpha)^{-(2+\alpha)^2/2}.$$

Равенство достигается для круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^2(\alpha^2-4)+\alpha^2}{z^2(1+z^2)^2}dz^2.$$

4. Доказать, что для любого положительного числа α и любых попарно непересекающихся областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, 2, 3, 4$, содержащих точки соответственно $0, -i, i, \infty$, выполняется

$$(r(B_1, 0) r(B_4, \infty))^{\alpha^2} r(B_2, -i) r(B_3, i) \le 4\alpha^{2\alpha^2}|1-\alpha|^{-(1-\alpha)^2}(1+\alpha)^{-(1+\alpha)^2},$$

(при $\alpha = 1$ правая часть неравенства равна $1/4$). Убедиться, что в случае $\alpha \ge 1$ и $B_1 \cap B_4 = \emptyset$, $B_2 \cap B_3 \ne \emptyset$ либо $\alpha \le 1$ и $B_2 \cap B_3 = \emptyset$, $B_1 \cap B_4 \ne \emptyset$ неравенство по-прежнему имеет место.

Свободные полюса

Пусть E - фиксированное множество на комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}$, и пусть $\alpha_k,\ k = 1, \ldots, n$ $(n \geq 2)$, - фиксированные положительные числа. Рассмотрим следующую задачу:

$$\prod_{k=1}^{n} (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} \to \sup;$$

$$a_k \in E \cap B_k,\ k = 1, \ldots, n, \qquad B_k \cap B_l = \emptyset, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, \ldots, n.$$

Если E - произвольный компакт, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ $(n = 2)$, то из неравенства Лаврентьева $(6.1')$ вытекает, что искомая верхняя грань равна квадрату диаметра множества E. Отметим, что точное значение верхней грани выписанного произведения при любых фиксированных точках a_k и попарно непересекающихся областях B_k известно лишь для начальных значений n. Тем не менее, в ряде частных случаев указанная задача со свободными полюсами a_k из множества E может быть решена для любых $n \geq 2$. Рассмотрим сначала простейший пример такого рода.

Теорема 16. *Для любых различных точек* $a_k,\ k = 1, \ldots, n$ $(n \geq 2)$, *лежащих на окружности* $|z| = 1$, *и любых попарно непересекающихся областей* $B_k,\ a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}},\ k = 1, \ldots, n$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n. \tag{9}$$

Если, дополнительно, области $B_k,\ k = 1, \ldots, n$, *допустимы, то равенство в* (9) *достигается в том и только в том случае, когда* $a_k = \exp(i(\theta + 2\pi k/n)),\ B_k = \{z : |\arg z - \theta - 2\pi k/n| < \pi/n\},\ k = 1, \ldots, n$, *где* θ *- произвольная вещественная постоянная.*

Примеры решенных задач об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружностях либо на лучах можно найти в недавних работах Кузьминой, Емельянова и Бахтина. Первые два автора развивают экстремально-метрический подход [Kuz1], в то время как Бахтин применяет вариационные методы и разделяющее преобразование областей [Bakh]. В ряде случаев полученные результаты приводят к решению задач со свободными полюсами на множествах,отличных от лучей либо окружностей. Например, привлекая дробно-линейное отображение $z = (1 - i\zeta)/(1 + i\zeta)$, переводящее вещественную ось в окружность $|z| = 1$, получаем из теоремы 16 следующее утверждение: для любых различных точек a_k на вещественной оси и любых попарно непересекающихся областей $B_k,\ a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}_\zeta,\ k = 1, \ldots, n,\ n \geq 2,$

выполняется точная оценка

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{r(B_k, a_k)}{1 + a_k^2} \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n .$$

Полагая здесь λa_k вместо a_k, где λ - любое положительное число, легко приходим к точному неравенству для произведения внутренних радиусов неналегающих областей в случае, когда точки a_k принадлежат заданному отрезку. Сказанное выше дополняет

Теорема 17. *Пусть точки* a_k, $k = 1, \ldots, n$, $n \geq 1$, *принадлежат интервалу* $(-1, 1)$; *области* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, \ldots, n$, *попарно не пересекаются, и пусть дополнение* $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ *содержит некоторый континуум, соединяющий точки* -1 *и* 1. *Тогда*

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{r(B_k, a_k)}{\sqrt{1 - a_k^2}} \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n .$$

Знак равенства имеет место в случае, когда $a_k = \cos[\pi(2k-1)/(2n)]$, $k = 1, \ldots, n$, *и области* B_k *ограничены кривыми* $\{z = (\zeta + 1/\zeta)/2 : \zeta^{2n} \in [0, 1]\}$.

Рассмотрим задачу об экстремальном разбиении со свободными полюсами для произведений радиусов Робена $r(B_k, \Gamma_k, a_k)$ взамен внутренних радиусов $r(B_k, a_k)$.

Теорема 18. *Пусть точки* a_k, $k = 1, \ldots, n$, $n \geq 2$, *принадлежат окружности* $|z| = \rho$, $0 < \rho < 1$; *области* B_k, $a_k \in B_k \subset U$, $k = 1, \ldots, n$, *односвязные и попарно непересекающиеся; и пусть замкнутые множества* $\Gamma_k, \Gamma_k \subset \partial B_k$, $k = 1, \ldots, n$, *такие, что для каждого* k *множество* $(\partial B_k) \setminus \Gamma_k$ *либо пусто, либо представляет собой дугу окружности* $|z| = 1$, $k = 1, \ldots, n$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, \Gamma_k, a_k) \leq \prod_{k=1}^{n} r(B_k^*, \Gamma_k^*, a_k^*) = \left(\frac{4\rho}{n} \, \frac{1 + \rho^n}{1 - \rho^n}\right)^n ,$$

где

$$a_k^* = \rho \exp(2\pi i k/n), \quad B_k^* = \{z \in U : |\arg z - 2\pi k/n| < \pi/n\},$$

и $\quad \Gamma_k^* = \{z \in \overline{B}_k^* : z^n \in [-1, 0]\}, \quad k = 1, \ldots, n.$

Способ доказательства теоремы 18 позволяет распростанить ее на случай попарно непересекающихся областей в круговом кольце.

Теорема 19. *Для любых различных точек* $a_k,\ k=1,\dots,n$ $(n \geq 2)$, *лежащих на окружности* $|z|=1$, *и любых попарно непересекающихся областей* $B_k,\ a_k \in B_k \subset \mathbb{C},\ k=1,\dots,n$, *справедливы неравенства*

$$\sum_{k=1}^{n} K(B_k, a_k, \arg a_k + \pi/2) \geq \frac{n(n^2-1)}{12\pi}, \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{n} K(B_k, a_k, \arg a_k) \geq \frac{n(n^2+2)}{24\pi}. \tag{11}$$

Если $a_k = \exp(i(\theta + 2\pi k/n)),\ B_k = \{z : |\arg z - \theta - 2\pi k/n| < \pi/n\},\ k=1,\dots,n$, *то в* (10) *и* (11) *имеет место знак равенства. Здесь* θ *- произвольное вещественное число.*

Упражнения

1. (Кузьмина) В условиях теоремы 15 установить верхнюю грань произведения
$$(r(B_0, a_0))^{\alpha} \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$$
для любых $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$.

   Подсказка: повторить доказательство теоремы 15 $(\alpha = 1)$ с привлечением квадратичного дифференциала
$$Q(z)dz^2 = -\frac{(n^2-\alpha)z^n + \alpha}{z^2(z^n-1)^2} dz^2.$$

2. Установить верхнюю грань произведения
$$(r(B_1, -1) r(B_n, 1))^{1/4} \prod_{k=2}^{n-1} \frac{r(B_k, a_k)}{\sqrt{1-a_k^2}}$$
по всевозможным точкам $a_k \in (-1,1),\ k=2,\dots,n-1$, и всевозможным попарно непересекающимся областям $B_k,\ k=1,\dots,n,\ a_k \in B_k,\ k=2,\dots,n-1,\ -1 \in B_1,\ 1 \in B_n$.

3. При фиксированных t и $\rho,\ 0 < t < \rho < 1$, найти максимум произведения
$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$$
по всевозможным различным точкам $a_k,\ |a_k| = \rho$, и всевозможным попарно неналегающим областям B_k, лежащим в кольце $t < |z| < 1,\ a_k \in$

$B_k,\ k=1,\ldots,n$. Описать все экстремальные конфигурации точек и областей.

4. Доказать неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}(1+a_k^2)^2 K\left(B_k, a_k, \frac{\pi}{2}\right) \geq \frac{1}{6\pi}n(n^2+2)$$

для любых точек a_k на вещественной оси и любых попарно непересекающихся областей $B_k,\ a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}},\ k=1,\ldots,n,\ n\geq 2$.

Мебиусовы инварианты

Пусть B - открытое множество комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$, имеющее функцию Грина, и пусть $A=\{a_k\}_{k=1}^n$ - совокупность различных точек множества B. Положим по определению

$$M(B,A) := \frac{1}{2\pi n^2}\left\{\sum_{k=1}^{n}\log r(B,a_k) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n} g_B(a_k,a_l)\right\}.$$

Рассмотрим следующие мебиусовы инварианты

$$I(B,A) = \frac{\exp\{2\pi n^2 M(B,A)\}}{\prod'_{1\leq k<l\leq n}|a_k-a_l|^{2/(n-1)}},$$

$$J(B,A) = \frac{\exp\{2\pi n^2 M(B,A)\}}{\prod'^{\,n}_{k=1}|a_k-a_{k+1}|}, \qquad a_{n+1}=a_1,\ n\geq 2,$$

где штрих у произведения означает, что если одна из точек a_k является ∞, то под соответствующим сомножителем понимается единица. При $n=2$ и $n=3$ данные величины совпадают. Факт инвариантности относительно группы дробно-линейных автоморфизмов комплексной сферы означает:

$$I(B,\{a_k\}_{k=1}^n) = I(\varphi(B),\{\varphi(a_k)\}_{k=1}^n) \qquad \text{и}$$

$$J(B,\{a_k\}_{k=1}^n) = J(\varphi(B),\{\varphi(a_k)\}_{k=1}^n)$$

для любого мебиусова преобразования $\varphi:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$. Заметим, что функция Грина является конформным инвариантом. Сохранение при мебиусовых преобразованиях величины

$$\frac{r(B,a_1)r(B,a_2)}{|a_1-a_2|^2}$$

проверяется непосредственно. Другие инварианты получаются перемножением попарных произведений указанного вида, а также добавлением множителей с участием функций Грина и ангармонических отношений. В частности, инвариант $J(B,A)$ при $n \geq 4$ отличается от $I(B,A)$ на произведение степеней модулей ангармонических отношений точек из совокупности A. В случае, когда множество B является объединением попарно непересекающихся областей $B_k,\ a_k \in B_k,\ k = 1, \ldots, n$, принято обозначение

$$I(B,A) = I_n \equiv \left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right) \prod_{1\leq k<l\leq n}{}' |a_k - a_l|^{2/(1-n)}.$$

Если хотя бы две области из совокупности $\{B_k\}_{k=1}^n$ пересекаются, то

$$I\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k, A\right) > I_n.$$

Оценка сверху мебиусова инварианта I_n эквивалентна экстремальной задаче со свободными полюсами:

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \to \sup;$$

$$a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}},\ \ B_k \cap B_l = \emptyset,\ k \neq l,\ k, l = 1, \ldots, n,\ \ \prod_{k=1}^{n} \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n} |a_k - a_l| = 1\ (n \geq 2).$$

Неравенство Лаврентьева (3′) дает точную оценку

$$I_2 \leq 1.$$

Из теоремы Голузина [Gol, гл. IV,§5] вытекает

$$I_3 \leq 3^{-9/2} 4^3$$

в предположении односвязности областей $B_k,\ k = 1, 2, 3$. При том же предположении Кузьмина (см. [Kuz2]) установила следующий результат

$$I_4 \leq 4^{-8/3} 3^2.$$

Оценка сверху инварианта $I_n,\ n \geq 5$, является трудной и весьма увлекательной задачей. До настоящего времени решение этой задачи в случае $n = 5$ было получено только при дополнительном предположении, что совокупность точек $\{a_k\}_{k=1}^5$ симметрична относительно некоторой окружности или прямой (теорема 21).

Теорема 20. *Пусть* $A = \{a_k\}_{k=1}^4$ *– совокупность различных точек комплексной сферы* $\overline{\mathbb{C}}$, *и пусть множество* B *отделяет точки* a_1, a_2 *от точек* a_3 *и* a_4. *Тогда*

$$I(B, A) \leq |(a_1, a_3, a_4, a_2)(a_1, a_4, a_3, a_2)|^{4/3}, \tag{12}$$

где $(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ *– ангармоническое отношение четырех точек. Равенство в* (12) *достигается в случае, когда множество* B *ограничено кривыми, заданными уравнением*

$$|(z - a_1)(z - a_2)| = |(z - a_3)(z - a_4)|.$$

Следствие. *Пусть точки совокупности* $A = \{a_k\}_{k=1}^4$ *расположены на единичной окружности* $|z| = 1$ *против хода часовой стрелки в порядке возрастания индекса, и пусть множество* B *отделяет точки* a_1, a_3 *от точек* a_2 *и* a_4. *Тогда справедливы неравенства*

$$I(B, A) \leq 4^{-4/3}, \qquad J(B, A) \leq 1/4.$$

Равенство в каждом случае достигается при $a_k = \exp(i(\theta + \pi k/2))$, $k = 1, \ldots, 4$ *и* $B = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg z^4 \neq 4\theta + \pi\}$, *где* θ *– произвольная вещественная постоянная.*

Теорема 21. [4] *Для любых различных точек* a_k, $k = 1, \ldots, 5$, *две из которых симметричны относительно прямой или окружности, проходящей через остальные три точки, и для любых попарно непересекающихся областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, \ldots, 5$, *справедливо неравенство*

$$I_5 = I_5(a_1, \ldots, a_5, B_1, \ldots, B_5) \leq 3^{-3/4} 4^{11/3} 5^{-25/6}.$$

Если, дополнительно, области B_k, $k = 1, \ldots, n$, *допустимы, то знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда точки* a_k *и области* B_k *с точностью до дробно-линейного отображения совпадают с точками* $0, 1, e^{2\pi i/3}, e^{-2\pi i/3}, \infty$ *и круговыми областями* B_k^* *квадратичного дифференциала*

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^6 + 7z^3 + 1}{z^2(z^3 - 1)^2} dz^2.$$

[4] Эта теорема доказана независимо Кузьминой и автором [Kuz2, №5, с.26]

Следствие. *Пусть* $A = \{a_k\}_{k=1}^5$ *- совокупность различных точек сферы* $\overline{\mathbb{C}}$, *и пусть множество* B *является объединением попарно неналегающих областей* $B_k, a_k \in B_k, k = 1, \dots, 5$, *таких, что области* B_4 *и* B_5 *расположены по разные стороны от прямой или окружности, проходящей через точки* a_1, a_2 *и* a_3. *Тогда*

$$I(B, A) = I_5(a_1, \dots, a_5, B_1, \dots, B_5) \le 3^{-3/4} 4^{11/3} 5^{-25/6}$$

с утверждением о знаке равенства как в теореме 21.

Теорема 22. *Пусть точки совокупности* $A = \{a_k\}_{k=1}^6$ *расположены на окружности* $|z| = 1$ *против хода часовой стрелки в порядке возрастания индекса, и пусть множество* B *отделяет точку* a_k *от точки* $a_{k+1}, k = 1, \dots, 6$ $(a_7 = a_1)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$J(B, A) \le \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

Равенство достигается в случае, когда $A = \{\exp(i(\theta + \pi k/3))\}_{k=1}^6$ *и* $B = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg z^6 \ne 6\theta + \pi\}$, *где* θ *– произвольная вещественная постоянная.*

Неравенства с участием производной Шварца

Пусть функция f регулярна в области $B \subset \mathbb{C}$ и $f'(z) \ne 0$ при $z \in B$. Тогда в этой области определено выражение

$$S_f(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2,$$

которое называется *производной Шварца* или *шварцианом*. Если функция f имеет простой полюс в точке z, то производная Шварца в этой точке определяется по формуле

$$S_f(z) = S_{1/f}(z).$$

Наконец, если f регулярна и однолистна в окрестности бесконечности, то по определению считаем

$$S_f(\infty) = \lim_{z \to 0} z^4 S_\varphi(z),$$

где $\varphi(z) = f(1/z)$. Таким образом, производная Шварца определена в любой области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, в которой функция f мероморфна и локально однолистна. Прямым вычислением устанавливается формула

$$S_{f \circ g} = (S_f \circ g)(g')^2 + S_g.$$

Мебиусовы преобразования f характеризуются тем, что для них выполняется $S_f = 0$.

Применение асимптотических формул для емкостей конденсаторов с последующим сближением точек "концентрации" пластин ведет к оценкам некоторых комбинаций коэффициентов однолистных функций. Заметим, что вырождающаяся в точку пластина "приводит" к оценке модуля производной $f'(z)$; две сближающиеся и вырождающиеся пластины разной полярности (диполь) - к оценке шварциана $S_f(z)$; а простейший мультиполь из четырех пластин (либо трех пластин соответствующей полярности) дает оценку выражения $S_f''(z) - S_f^2(z)$. Поясним сказанное на следующем простом примере. Пусть функция $f \in \mathfrak{M}$ и в окрестности начала координат справедливо разложение

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \ .$$

Из конформной инвариантности емкости и монотонности при достаточно малых ρ и r и любых φ имеем

$$\operatorname{cap} C(r; U, \partial U, \{\rho e^{i\varphi}, -\rho e^{i\varphi}\}, \{0, 1, -1\}, \{r, r\} = \operatorname{cap} C(r; f(U),$$

$$\partial f(U), \{f(\rho e^{i\varphi}, f(-\rho e^{i\varphi})\}, \{0, 1, -1\}, \{|f'(\rho e^{i\varphi})|r, |f'(-\rho e^{i\varphi})|r\}) \geq$$

$$\geq \operatorname{cap} C(r; \overline{\mathbb{C}}, \emptyset, \{f(\rho e^{i\varphi}), f(-\rho e^{i\varphi})\}, \{1, -1\}, \{|f'(\rho e^{i\varphi})|r, |f'(-\rho e^{i\varphi})|r\}).$$

Применение асимптотичеких формул при $r \to 1$ дает

$$\frac{4\rho^2(1-\rho^2)^2}{(1+\rho^2)^2} \leq \frac{|f(\rho e^{i\varphi}) - f(-\rho e^{i\varphi})|^2}{|f'(\rho e^{i\varphi}) f'(-\rho e^{i\varphi})|}$$

Учитывая разложение функции f в окрестности начала, после несложных вычислений при $\rho \to 0$ получаем

$$1 \geq \operatorname{Re} e^{2i\varphi} \left(\frac{c_3}{c_1} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) = \frac{1}{6} \operatorname{Re} e^{2i\varphi} S_f(0).$$

Наконец, ввиду произвольности φ приходим к неравенству Крауса:

$$|S_f(0)| \leq 6.$$

Любопытно, что аналогичное применение конденсатора $C(r; U, \emptyset, \{\rho e^{i\varphi}, -\rho e^{i\varphi}\},$ $\{0, 1, -1\}, \{r, r\})$ взамен $C(r; U, \partial U, \{\rho e^{i\varphi}, -\rho e^{i\varphi}\}, \{0, 1, -1\}, \{r, r\})$ дает противоположное неравенство для емкости, но то же самое неравенство для шварциана.

Теорема 23. *Если функция $f \in \mathfrak{M}$, то*

$$|S_f''(0) - S_f^2(0)| \le 60.$$

Равенство достигается для функции Кебе $k(z) = z(1+z)^{-2}$.

Пусть E - невырожденный континуум, и пусть функция

$$f(z) = a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \dots$$

конформно и однолистно отображает внешность круга $D := \{z : |z| > 1\}$ на связную компоненту дополнения $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus E$, содержащую бесконечно удаленную точку. Обозначим через

$$f^*(z) = a_1^* z + a_0^* + \frac{a_{-1}^*}{z} + \dots$$

функцию, конформно и однолистно отображающую область D на $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus E^*$, где E^* - результат симметризации Штейнера множества E относительно вещественной оси. Неравенство Полиа и Сеге

$$|a_1| \geqslant |a_1^*|$$

эквивалентно неравенству для логарифмических емкостей

$$\operatorname{cap} E \geqslant \operatorname{cap} E^*.$$

Естественно поставить вопрос о поведении последующих коэффициентов в разложении функции f при симметризации Штейнера. Не существует содержательного неравенства между $|a_0|$ и $|a_0^*|$. Действительно, сдвиг множества E вдоль мнимой оси не меняет $\operatorname{Re} a_0$, $\operatorname{Re} a_0^*$ и $\operatorname{Im} a_0^* = 0$ и делает любым значение $\operatorname{Im} a_0$. С другой стороны, можно привести примеры, когда $\operatorname{Re} a_0 \neq \operatorname{Re} a_0^*$, и в этом случае сдвиг множества E вдоль вещественной оси приводит к неравенству $|\operatorname{Re} a_0| < |\operatorname{Re} a_0^*|$. Далее, если множество E есть отрезок, наклоненный к вещественной оси под острым углом, то $|a_{-1}| > |a_{-1}^*|$. В случае, когда $E = \{w : |w| = 1\}$, имеем противоположное неравенство: $|a_{-1}| = 0 < 1/2 = |a_{-1}^*|$.

Теорема 24. *Если функции f и f^* определены выше, то справедливо неравенство*

$$|a_1|^2 - \operatorname{Re} a_1 a_{-1} \ge |a_1^*|^2 - \operatorname{Re} a_1^* a_{-1}^*. \tag{13}$$

Выписанное неравенство эквивалентно соотношению

$$\frac{1}{|f'(\infty)|^2} + \frac{1}{6}\operatorname{Re}\frac{S_f(\infty)}{(f'(\infty))^2} \ge \frac{1}{|f^{*\prime}(\infty)|^2} + \frac{1}{6}\operatorname{Re}\frac{S_{f^*}(\infty)}{(f^{*\prime}(\infty))^2},$$

где производная в бесконечности считается с учетом локальных параметров.

Неравенство (13) имеет следующую емкостную интерпретацию. Пусть множество E симметрично относительно вещественной оси, и пусть $H \setminus E$ - односвязная область, $H := \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$. Обозначим через g функцию, которая конформно и однолистно отображает область $H \setminus E$ на полуплоскость H так, что

$$\lim_{w\to\infty}[g(w) - w] = 0.$$

Предел

$$\operatorname{hcap}(E \cap H) = \lim_{w\to\infty} w[g(w) - w]$$

называется "half-plane" емкостью множества $E \cap H$ относительно бесконечно удаленной точки [L, с.69]. Если функция f определена выше, то разложение функции g в окрестности бесконечности имеет вид

$$g(w) = w + \frac{a_1^2 - a_1 a_{-1}}{w} + \dots ,$$

где a_1 и a_{-1} - вещественные числа. Таким образом,

$$\operatorname{hcap}(E \cap H) = |a_1|^2 - \operatorname{Re} a_1 a_{-1}$$

и неравенство (13) запишется ввиде

$$\operatorname{hcap}(E \cap H) \geqslant \operatorname{hcap}(E^* \cap H).$$

Теорему 24 дополняет следующее утверждение.

Теорема 25. *Пусть функция $\widetilde{f}(z) = \widetilde{a}_1 z + \widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_{-1}/z + \dots$ конформно и однолистно отображает область D на внешность континуума $\widetilde{E} \subset E^*$. Тогда*

$$|a_1^*|^2 - \operatorname{Re} a_1^* a_{-1}^* \geq |\widetilde{a}_1|^2 - \operatorname{Re} \widetilde{a}_1 \widetilde{a}_{-1}.$$

В качестве приложений теорем 24 и 25 приведем утверждения о покрытии в классе Σ.

Следствие. *Пусть функция* $f(z) = z + a_0 + a_{-1}/z + \dots$ *принадлежит классу* Σ *и пусть* w_0 *- произвольная точка дополнения* $E = \mathbb{C}_w \setminus f(D)$. *Тогда для любого вещественного числа* φ *справедливо неравенство*

$$\frac{m_f^4(w_0,\varphi) + 16R_f^4(w_0)}{8m_f^2(w_0,\varphi)} \le 1 + \operatorname{Re} e^{-2i\varphi} a_{-1},$$

где $R_f(w_0) \ge 0$ *радиус наибольшего круга с центром в точке* w_0, *принадлежащего множеству* E, *а* $m_f(w_0,\varphi)$ *- линейная мера Лебега пересечения* E *с прямой* $\{w = w_0 + te^{i\varphi} : t \in \mathbb{R}\}$. *Знак равенства достигается для функций* $f(z) = w_0 + e^{i\varphi}\lambda^{-1}h^{-1}(\lambda h(e^{-i\varphi}z))$ *при* $h(\zeta) = \zeta + 1/\zeta$ *и любом* $\lambda > 1$.

Полученная оценка содержит, в частности, неравенства

$$m_f^2(w_0, (\arg a_{-1})/2)/8 - 1 \le |a_{-1}| \le 1 - m_f^2(w_0, (\arg a_{-1} + \pi)/2)/8.$$

Правое неравенство уточняет хорошо известное следствие теоремы площадей: $|a_{-1}| \le 1$ [Gol, гл.II, §4]. Оба неравенства дополняют классическую оценку

$$m_f(w_0,\varphi) \le 4, \qquad \text{для любых } \varphi,$$

вытекающую из неравенства Полиа-Сеге. Именно,

$$m_f(w_0, (\arg a_{-1})/2) \le \sqrt{8(1 + |a_{-1}|)} \le 4,$$
$$m_f(w_0, (\arg a_{-1} + \pi)/2) \le \sqrt{8(1 - |a_{-1}|)}.$$

Равенства выполняются в случае $|a_{-1}| = 1$, $f(z) = z + w_0 + e^{2i\varphi}/z$. Интересно было бы получить точные оценки в случае фиксированного $|a_{-1}|$, отличного от единицы.

Следствие. *Предположим, что при некоторых* α, β *и* γ *для функции* $f(z) = z + a_0 + a_{-1}/z + \dots$ *класса* Σ *выполняется неравенство*

$$m\left((\mathbb{C}_w \setminus f(D)) \cap l(u)\right) \ge \alpha \qquad \text{для любых } u, \quad \beta \le u \le \gamma.$$

Тогда

$$\operatorname{Re} a_{-1} \le 1 - c^2(1 - k^2)/2,$$

где вещественные постоянные c *и* k *находятся из условий*

$$c\int_0^1 \sqrt{\frac{\zeta^2 - k^2}{\zeta^2 - 1}}\, d\zeta = (\gamma - \beta)/2 - i\alpha/2, \qquad c > 0,\ 0 < k < 1.$$

Знак равенства имеет место для функции f *класса* Σ, *конформно и однолистно отображающей область* D *на внешность прямоугольника со сторонами, лежащими на прямых* $u = \beta$, $u = \gamma$, $\gamma - \beta < 4$, *и с подходящей высотой* α.

Упражнения

1. (Нехари) Для функций $f(z) = c_1z + \ldots$ класса SB_0 доказать неравенство
$$|S_f(0)| \leq 6(1 - |c_1|^2).$$

2. Получить точное неравенство
$$|S_f''(0) - S_f^2(0)| \leq 60(1 - |c_1|^4 - 2|c_2|^2)$$
для функций $f(z) = c_1z + c_2z^2 + \ldots$ класса SB_0. Привести пример функций, для которых в этом неравенстве имеет место знак равенства.

3. (Аленицын) Пусть функции f и g мероморфно и однолистно отображают круг U на неналегающие области, причем $\operatorname{Im} f(0) = \operatorname{Im} g(0)$, $f'(0) > 0$, $g'(0) > 0$. Доказать, что
$$\frac{f'(0)g'(0)}{(f(0) - g(0))^2} \leq 1 - \frac{1}{12}|S_f(0) + \overline{S_g(0)}|.$$
Равенство достигается для $f(z) = (1+z)/(1-z)$ и $g(z) = (z-1)/(z+1)$.

4. Показать, что для любой функции f класса $\mathfrak{M}(R)$ выполняются неравенства
$$\frac{n^2-1}{2}\left(n - \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{G_n'(z_k)}{f'(z_k)}\right|^2\right) \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{Re}[z_k^2(S_f(z_k) - S_{G_n}(z_k))]}{|f'(z_k)|^2} \leq \frac{n^2+2}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{G_n'(z_k)}{f'(z_k)}\right|^2 - n\right),$$
где $G_n(z) = G(z; n, R)$ и $z_k = \exp(i(\pi/n + 2\pi(k-1)/n))$, $k = 1, \ldots, n$.

5. Пусть функция $f \in \mathfrak{M}$ и имеет в окрестности начала координат разложение $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots$. Доказать, что для любого вещественного числа φ
$$\operatorname{Re}[e^{2i\varphi}(a_3 - a_2^2)] \leq 1 - \nu_f^2(0, \varphi)/8.$$
Знак равенства достигается для функции из предыдущего упражнения.

6. Предположим, что функция f класса SB_0 аналитически продолжима на некоторую открытую дугу окружности $|z| = 1$, содержащую точку $z = 1$, и отображает эту дугу на дугу окружности $|w| = 1$. Доказать неравенство
$$\operatorname{Re}[2S_f(0) + S_f(1)] \leq 12(1 - |f'(0)|^2).$$

Литература

1. Дубинин В.Н., *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Успехи матем. наук **49** (1994), №1, 3–76.

2. Кузьмина Г.В., *Методы геометрической теории функций*, Алгебра и анализ **9** (1997), №3, 41–103; №5, 1–50.

3. Солынин А.Ю., *Модули и экстремально-метрические проблемы*, Алгебра и анализ **11** (1999), №1, 3–86.

4. Vasil'ev A., *Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math. **1788**, Springer, 2002.

5. Дубинин В.Н., *Обобщенные конденсаторы и асимптотика их емкостей при вырождении некоторых пластин*, Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 38–51.

6. Дубинин В.Н., Прилепкина Е.Г., *О вариационных принципах конформных отображений*, Алгебра и анализ **18** (2006), №3, 39–62.

7. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б., *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе*, Ин-т мат. НАН Украины, Киев, 2008.

8. Дубинин В.Н., *О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена*, Матем. сб. **200** (2009), №10, 25–38.

9. Дубинин В.Н., Прилепкина Е.Г., *Теоремы искажения для функций, мероморфных и однолистных в круговом кольце*, Сиб. матем. журн. **51** (2010), №2, 193–207.

10. Lawler G.F., *Conformally invariant processes in the plane*, Amer. Math. Soc. Math. Sur. and Mon. **114**, 2005.