

**ОБ ИСКАЖЕНИИ МОДУЛЕЙ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ  
ПРИ ЛОКАЛЬНО-КВАЗИКОНФОРМНЫХ  
ОТОБРАЖЕНИЯХ**

**О. Р. Эйланголи**

Тверь, EyelangoliOR@rambler.ru

Напомним, что модулем двусвязной области  $D \subset \mathbb{C}$  называется число  $M(D) = \frac{1}{\lambda(\Gamma)}$ , где  $\lambda(\Gamma)$  – экстремальная длина семейства кривых  $\Gamma$ , разделяющих граничные компоненты области  $D$ .

Известно [1], что модуль  $M(f(D))$  образа  $f(D)$  двусвязной области  $D$  при  $\mathbb{K}_f$ -квазиконформном отображении  $f$  удовлетворяет неравенствам:

$$\frac{1}{\mathbb{K}_f} M(D) \leq M(f(D)) \leq \mathbb{K}_f M(D).$$

Равенства достигаются в том и только том случае, когда  $f$  – аффинное отображение с коэффициентом квазиконформности  $\mathbb{K}_f$ . Кроме того, приведенные неравенства неприменимы к отображениям, квазиконформным в среднем или локально-квазиконформным.

Следующая теорема уточняет данные оценки и дает возможность преодолеть некоторые из ограничений области их применения.

**Теорема [2].** Пусть  $f$  – локально-квазиконформное отображение кругового кольца  $K(r, R) = \{z : r < |z| < R\}$ ,  $r > 0$ ,  $R < \infty$ , на двусвязную область  $D \subset \mathbb{C}$  с первой характеристикой М.А. Лаврентьева  $p_f(z) = \frac{|f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|}$ . Пусть  $P_f(r) = \operatorname{ess\,sup}_{|z|=r} p_f(z)$ . Если интегралы  $\int_r^R P_f^{-1}(t) \frac{dt}{t}$  и  $\int_r^R P_f(t) \frac{dt}{t}$  определены, то модуль области  $D$  удовлетворяет соотношениям

$$\frac{1}{2\pi} \int_r^R P_f^{-1}(t) \frac{dt}{t} \leq M(D) \leq \frac{1}{2\pi} \int_r^R P_f(t) \frac{dt}{t}.$$

**Следствие [2].** Пусть  $f$  – локально-квазиконформное отображение единичного круга  $\Delta$  на себя, такое, что  $f(0) = 0$  и  $|\mu_f(z)| \leq |z|$ . Тогда

$$|f_z(0)| \leq 4.$$

Равенство достигается на отображении  $f_0(z) = \frac{4z}{(1+|z|)^2}$ .

В работе [3] получены оценки искажения приведенного модуля области.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Альфорс Л. *Лекции по квазиконформным отображениям.* / Л. Альфорс. М.: Наука. 1969.
2. Граф С. Ю., Эйланголи О. Р. *Об искажении модулей двусвязных областей при квазиконформном отображении* / С. Ю. Граф, О. Р. Эйланголи // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2009. С. 43 – 53.
3. Эйланголи О.Р. *Об искажении приведенного модуля* / О. Р. Эйланголи // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2009. С. 57 – 62.