О четырехэлементном уравнении для функций, аналитических вне трапеции, и его приложение.

Ф.Н.Гарифьянов, С.А.Модина

Казань, f.garifyanov@mail.ru, modinasvetlana@rambler.ru

Пусть $D-$ равнобедренная трапеция с вершинами $t_1 = -2 - i$, $t_2 = 2 - i, t_3 = i + 1, t_4 = i - 1$ и сторонами l_j, перечисленными в порядке положительного обхода границы $\partial D(t \in l_1 \Longrightarrow Jmt = -1)$. Рассмотрим функциональное уравнение

$$(Vf)(z) \equiv \sum_{m=1}^{4} (-1)^{m+1} f[\sigma_m(z)] = g(z), z \in D, \tag{1}$$

где $\sigma_m(z) = t_m + t_{m+1} - z$ $(t_5 = t_1)$, при следующих предположениях:

1) Неизвестная функция $f(z)$ ищется в классе B функций, аналитических вне D и исчезающих на бесконечности, причем $f^-(t) \in H(l_j)$, $j = \overline{1,4}$, а в вершинах допускаются, самое большее, логарифмические особенности.

2)Свободный член $g(z)$ аналитичен в D и $g^+(t) \in H(\partial D)$.

Заметим, что преобразования $\sigma_m(z)$ переводят трапецию D в трапеции, имеющие с исходной общую сторону, а множество $C \setminus \bigcup_{m=1}^{4} \sigma_m(D)$ распадается на две связные компоненты.

Показано, что уравнение (1) безусловно разрешимо и имеет единственное решение. Решение $f(z)$ является нижней функцией, ассоциированной по Борелю с целой функцией экспоненциального типа $F(z)$, а $D-$ ее сопряженная индикаторная диаграмма. Поэтому проблема моментов

$$\sum_{j=0}^{3} (-1)^{j+1} \int_{L_j} F(\tau) e^{\gamma_j \tau} \tau^k d\tau = g_k,$$

где L_j- луч $arg\tau = \frac{\pi j}{2}$, а $\gamma_0 = -3, \gamma_1 = 2\iota, \gamma_2 = 3, \gamma_3 = -2\iota$, безусловно разрешима и имеет единственное решение, если только $\overline{\lim}_{n \longrightarrow \infty} n^{-1} \sqrt[n]{|g_n|} > (\sqrt{2}e)^{-1}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1.Гарифьянов Ф.Н.*Функциональные уравнения, связанные с автоморфными формами.*/Ф.Н.Гарифьянов.:Казан.изд-во КГЭУ.2004г. с.124.

Работа выполненна при финансовой поддержке гранта РФФИ, грант 09-01-97008-р_Поволжье_а