Однопараметрические полугруппы аналитических функций с заданными неподвижными точками

В.В. Горяйнов

Волжский гуманитарный институт (филиал) ВолГУ

V Петрозаводская Международная конференция
"Комплексный анализ и приложения"
27 июня - 3 июля, 2010
Петрозаводск

Пусть $\mathfrak{P}$ – совокупность всех голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ функций f, принимающих значения из $\mathbb{D}$. Тогда $\mathfrak{P}$ можно рассматривать как топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной сходимости. Роль единицы в этой полугруппе играет тождественное преобразование $f(z) \equiv z$.

Рассматривая $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \colon t \geqslant 0\}$ как аддитивную полугруппу с обычной топологией вещественных чисел, под однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}$ будем понимать непрерывный гомоморфизм $t \mapsto f^t$, действующий из $\mathbb{R}^+$ в $\mathfrak{P}$.

Пусть $\mathfrak{P}$ – совокупность всех голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ функций f, принимающих значения из $\mathbb{D}$. Тогда $\mathfrak{P}$ можно рассматривать как топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной сходимости. Роль единицы в этой полугруппе играет тождественное преобразование $f(z) \equiv z$.

Рассматривая $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R}\colon t \geqslant 0\}$ как аддитивную полугруппу с обычной топологией вещественных чисел, под однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}$ будем понимать непрерывный гомоморфизм $t \mapsto f^t$, действующий из $\mathbb{R}^+$ в $\mathfrak{P}$.

Это означает, что семейство $\{f^t\}_{t\geqslant 0}$ функций из $\mathfrak{P}$ удовлетворяет условиям:

(i) $f^{t+s}(z) = f^t \circ f^s(z)$ при $s, t \geqslant 0$;

(ii) $f^t(z) \to z$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $t \to 0$.

Заметим, что при целых неотрицательных значениях t мы получаем обычные итерации $f^n = f \circ f^{n-1}, n = 2, 3, \dots,$ функции $f = f^1$. Поэтому элементы семейства $\{f^t\}_{t\geqslant 0}$ называют также дробными итерациями функции f.

Это означает, что семейство $\{f^t\}_{t\geqslant 0}$ функций из $\mathfrak{P}$ удовлетворяет условиям:

(i) $f^{t+s}(z) = f^t \circ f^s(z)$ при $s, t \geqslant 0$;

(ii) $f^t(z) \to z$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $t \to 0$.

Заметим, что при целых неотрицательных значениях t мы получаем обычные итерации $f^n = f \circ f^{n-1}, n = 2, 3, \ldots,$ функции $f = f^1$. Поэтому элементы семейства $\{f^t\}_{t\geqslant 0}$ называют также дробными итерациями функции f.

Исследование проблемы дробных итераций имеет богатую историю и восходит к работам

E. Schröeder, "Über itierte Funktionen", Math. Ann., **3** *(1871), 296–322.*

G. Königs, "Recherches sur les intégrales des certaines equations fonctionelles", Ann. Ecole Norm. Sup., **1(3)** *(1884), 3–41.*

Отметим также, что однопараметрические полугруппы аналитических функций возникают во многих вопросах анализа и его приложений. Часто они описывают динамику того или иного процесса.

Исследование проблемы дробных итераций имеет богатую историю и восходит к работам

E. Schröeder, "Über itierte Funktionen", Math. Ann., **3** *(1871), 296–322.*

G. Königs, "Recherches sur les intégrales des certaines equations fonctionelles", Ann. Ecole Norm. Sup., **1(3)** *(1884), 3–41.*

Отметим также, что однопараметрические полугруппы аналитических функций возникают во многих вопросах анализа и его приложений. Часто они описывают динамику того или иного процесса.

Синтез алгебраических и топологических свойств приводит к тому, что семейство $\{f^t\}_{t\geqslant 0}$ является дифференцируемым по t. Более того, оно даже бесконечно дифференцируемо, а производная

$$\frac{\partial}{\partial t}f^t(z)\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{f^t(z)-z}{t} = v(z)$$

представляет собой аналитическую в $\mathbb{D}$ функцию и вполне характеризует однопараметрическую полугруппу $t\mapsto f^t$ посредством дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}f^t(z) = v\left(f^t(z)\right)$$

и начального условия $f^t(z)|_{t=0} = z$.

Функцию v называют инфинитезимальной образующей однопараметрической полугруппы $t\mapsto f^t$.

Синтез алгебраических и топологических свойств приводит к тому, что семейство $\{f^t\}_{t\geqslant 0}$ является дифференцируемым по t. Более того, оно даже бесконечно дифференцируемо, а производная

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f^t(z)-z}{t} = v(z)$$

представляет собой аналитическую в $\mathbb{D}$ функцию и вполне характеризует однопараметрическую полугруппу $t \mapsto f^t$ посредством дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z) = v\left(f^t(z)\right)$$

и начального условия $f^t(z)|_{t=0} = z$.
Функцию v называют инфинитезимальной образующей однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$.

В случае, когда функции f^t однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ оставляют неподвижным начало координат и сохраняют положительное направление вещественной оси в нуле, вид инфинитезимальной образующей v был получен в знаменитой работе

K. Löwner, "Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises I", Math. Ann., **89** *(1923), 103–121.*

В общем случае функция $f \in \mathfrak{P}$ может не иметь в круге $\mathbb{D}$ неподвижных точек.

В случае, когда функции f^t однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ оставляют неподвижным начало координат и сохраняют положительное направление вещественной оси в нуле, вид инфинитезимальной образующей v был получен в знаменитой работе

K. Löwner, "Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises I", Math. Ann., **89** *(1923), 103–121.*

В общем случае функция $f \in \mathfrak{P}$ может не иметь в круге $\mathbb{D}$ неподвижных точек.

Классический результат, известный как теорема Данжуа-Вольфа, утверждает, что если $f \in \mathfrak{P}$ отлична от дробно-линейного преобразования единичного круга на себя, то существует единственная точка q из замыкания $\overline{\mathbb{D}}$ единичного круга $\mathbb{D}$ такая, что $f^n(z) \to q$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $n \to \infty$.

При этом, если $q \in \mathbb{D}$, то $f(q) = q$, т. е. q является неподвижной точкой отображения $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. В случае, когда q является граничной точкой, т. е. лежит на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$, то в этой точке существуют угловые пределы

$$f(q) = \lim_{z \to q} f(z)\,, \quad f'(q) = \lim_{z \to q} f'(z) = \lim_{z \to q} \frac{f(z) - q}{z - q}\,.$$

Кроме того, $f(q) = q$ и $0 < f'(q) \leqslant 1$, т. е. q является граничной неподвижной притягивающей точкой.

Классический результат, известный как теорема Данжуа-Вольфа, утверждает, что если $f \in \mathfrak{P}$ отлична от дробно-линейного преобразования единичного круга на себя, то существует единственная точка q из замыкания $\overline{\mathbb{D}}$ единичного круга $\mathbb{D}$ такая, что $f^n(z) \to q$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $n \to \infty$.
При этом, если $q \in \mathbb{D}$, то $f(q) = q$, т. е. q является неподвижной точкой отображения $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. В случае, когда q является граничной точкой, т. е. лежит на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$, то в этой точке существуют угловые пределы

$$f(q) = \lim_{z \to q} f(z)\,, \quad f'(q) = \lim_{z \to q} f'(z) = \lim_{z \to q} \frac{f(z) - q}{z - q}\,.$$

Кроме того, $f(q) = q$ и $0 < f'(q) \leqslant 1$, т. е. q является граничной неподвижной притягивающей точкой.

В литературе q называют точкой Данжуа-Вольфа функции f и она является общей для всех итераций этой функции. Таким образом, если $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}$, то все функции f^t, $t > 0$, имеют одну и ту же точку Данжуа-Вольфа q.

В терминах этой точки записывается вид инфинитезимальной образующей

$$v(z) = (q - z)(1 - \overline{q}z)p(z),$$

где p – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, удовлетворяющая условию $\mathrm{Re}\, p(z) \geqslant 0$ при $z \in \mathbb{D}$.

Обратно, всякая функция v такого вида является инфинитезимальной образующей некоторой однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа-Вольфа q.

В литературе q называют точкой Данжуа-Вольфа функции f и она является общей для всех итераций этой функции. Таким образом, если $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}$, то все функции f^t, $t > 0$, имеют одну и ту же точку Данжуа-Вольфа q.

В терминах этой точки записывается вид инфинитезимальной образующей

$$v(z) = (q - z)(1 - \overline{q}z)p(z),$$

где p – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, удовлетворяющая условию $\mathrm{Re}\, p(z) \geqslant 0$ при $z \in \mathbb{D}$.

Обратно, всякая функция v такого вида является инфинитезимальной образующей некоторой однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа-Вольфа q.

В литературе q называют точкой Данжуа-Вольфа функции f и она является общей для всех итераций этой функции. Таким образом, если $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}$, то все функции f^t, $t > 0$, имеют одну и ту же точку Данжуа-Вольфа q.

В терминах этой точки записывается вид инфинитезимальной образующей

$$v(z) = (q - z)(1 - \overline{q}z)p(z),$$

где p – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, удовлетворяющая условию $\mathrm{Re}\, p(z) \geqslant 0$ при $z \in \mathbb{D}$.

Обратно, всякая функция v такого вида является инфинитезимальной образующей некоторой однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа-Вольфа q.

Приведенный выше результат получен в работе

E. Berkson, H. Porta, "Semigroups of analytic functions and composition operators", Michigan Math. J., **25** *(1978), 101–115.*

и известен как формула Берксона-Порты. Он лежит в основе многих исследований.

Если $f \in \mathfrak{P}$ отлична от тождественного преобразования, то в силу леммы Шварца внутри единичного круга $\mathbb{D}$ других, кроме точки Данжуа-Вольфа, неподвижных точек функция f иметь не может. С другой стороны, у неё могут быть неподвижные (в смысле углового предела) точки на границе $\mathbb{T}$ единичного круга.

Приведенный выше результат получен в работе

E. Berkson, H. Porta, "Semigroups of analytic functions and composition operators", Michigan Math. J., **25** *(1978), 101–115.*

и известен как формула Берксона-Порты. Он лежит в основе многих исследований.

Если $f \in \mathfrak{P}$ отлична от тождественного преобразования, то в силу леммы Шварца внутри единичного круга $\mathbb{D}$ других, кроме точки Данжуа-Вольфа, неподвижных точек функция f иметь не может. С другой стороны, у неё могут быть неподвижные (в смысле углового предела) точки на границе $\mathbb{T}$ единичного круга.

Теорема

Для того чтобы голоморфная в $\mathbb{D}$ функция v представляла собой инфинитезимальную образующую однопараметрической полугруппы $t \to f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа-Вольфа $q \in \overline{\mathbb{D}}$ и неподвижными точками $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{T}$, в которых функции $f^t, t > 0$, имеют конечные угловые производные, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде

$$v(z) = \frac{(q - z)(1 - \overline{q}z)}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{1 + \overline{a}_k z}{1 - \overline{a}_k z} + g(z)},$$

где $\lambda_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$, а g – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция с неотрицательной вещественной частью.

Пусть $f \in \mathfrak{P}$ отлична от дробно-линейного преобразования единичного круга на себя и имеет точку Данжуа-Вольфа $q \in \mathbb{D}$. Если производная в этой точке $f'(q) = \gamma$ не обращается в нуль, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(z) - q}{\gamma^n} = F(z)\,,$$

который представляет собой голоморфную в $\mathbb{D}$ функцию, удовлетворяющую условиям $F(q) = 0$, $F'(q) = 1$.

Этот предел называется функцией Кёнигса, которая также является решением функционального уравнения Шрёдера

$$F\left(f(z)\right) = \gamma F(z)\,.$$

Пусть $f \in \mathfrak{P}$ отлична от дробно-линейного преобразования единичного круга на себя и имеет точку Данжуа-Вольфа $q \in \mathbb{D}$. Если производная в этой точке $f'(q) = \gamma$ не обращается в нуль, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(z) - q}{\gamma^n} = F(z),$$

который представляет собой голоморфную в $\mathbb{D}$ функцию, удовлетворяющую условиям $F(q) = 0$, $F'(q) = 1$.

Этот предел называется функцией Кёнигса, которая также является решением функционального уравнения Шрёдера

$$F(f(z)) = \gamma F(z).$$

Если $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа-Вольфа $q \in \mathbb{D}$, то в силу однолистности функций f^t, $t \geqslant 0$, (это следует из единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, воспроизводящего однопараметрическую полугруппу по инфинитезимальной образующей) производная $(f^t)'(q) = \gamma^t$ в нуль не обращается. Поэтому можно определить функцию Кёнигса F, которая будет общей для всех f^t, $t > 0$. При этом F будет однолистной и

$$F\left(f^t(z)\right) = \gamma^t F(z)\,,$$

т. е. функцию Кёнигса F можно использовать для получения итераций функции f посредством функционального уравнения Шрёдера.

Теорема

Пусть $q \in \mathbb{D}$ *и* $a_1, \ldots, a_n$ *– попарно различные точки на единичной окружности* $\mathbb{T}$*. Для того чтобы голоморфная в* $\mathbb{D}$ *функция* F *представляла собой функцию Кенигса однопараметрической полугруппы* $t \mapsto f^t$ *в* $\mathfrak{P}$ *с точкой Данжуа-Вольфа* q *и неподвижными точками* $a_1, \ldots, a_n$*, в которых функции* $f^t, t > 0$*, имеют конечные угловые производные, необходимо и достаточно, чтобы для некоторых положительных чисел* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *и неотрицательного* γ*, удовлетворяющих условию* $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \gamma = 1$*,* $\sigma = e^{i\theta}$*,* $-\pi/2 < \theta < \pi/2$*, и вероятностной меры* μ *на* $\mathbb{T}$ *выполнялось равенство*

Теорема

$$F(z) = (z-q)\left(\frac{1-\overline{q}z}{1-|q|^2}\right)^{\sigma^2} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1-\overline{a}_k q}{1-\overline{a}_k z}\right)^{\lambda_k\left(1+\sigma^2\right)} \times$$

$$\times \exp\left\{\gamma\left(1+\sigma^2\right) \int_{\mathbb{T}} \ln\frac{1-\varkappa q}{1-\varkappa z}\, d\mu(\varkappa)\right\},$$

где под степенными функциями и логарифмом понимаются непрерывные ветви, которые принимают значения 1 *и* 0, *соответственно, при* $z = q$.

Пусть теперь $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа-Вольфа $q \in \mathbb{T}$. Тогда инфинитезимальная образующая v этой однопараметрической полугруппы не обращается в нуль в единичном круге.

Поэтому однозначно с точностью до аддитивной константы определяется аналитическая в $\mathbb{D}$ функция F посредством равенства $F'(z) = 1/v(z)$.

Нормируем её условием $F(0) = 0$ и будем называть функцией Кёнигса однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$.

Эта функция связана с однопараметрической полугруппой также равенством

$$F\left(f^t(z)\right) = F(z) + t\,,$$

$t \geqslant 0$, которое относительно F является функциональным уравнением Абеля.

Пусть теперь $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа-Вольфа $q \in \mathbb{T}$. Тогда инфинитезимальная образующая v этой однопараметрической полугруппы не обращается в нуль в единичном круге.
Поэтому однозначно с точностью до аддитивной константы определяется аналитическая в $\mathbb{D}$ функция F посредством равенства $F'(z) = 1/v(z)$.
Нормируем её условием $F(0) = 0$ и будем называть функцией Кёнигса однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$.

Эта функция связана с однопараметрической полугруппой также равенством

$$F\left(f^t(z)\right) = F(z) + t\,,$$

$t \geqslant 0$, которое относительно F является функциональным уравнением Абеля.

Теорема

Пусть q, $a_1, \ldots, a_n$ *– попарно различные точки на единичной окружности* $\mathbb{T}$. *Для того чтобы голоморфная в* $\mathbb{D}$ *функция* F *представляла собой функцию Кенигса однопараметрической полугруппы* $t \mapsto f^t$ *в* $\mathfrak{P}$ *с точкой Данжуа-Вольфа* q *и неподвижными точками* $a_1, \ldots, a_n$, *в которых функции* $f^t, t > 0$, *имеют конечные угловые производные, необходимо и достаточно, чтобы для некоторых* $\beta \in \mathbb{R}$, *положительных* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *неотрицательных* γ_1, γ_2 *и вероятностной меры* μ *на* $\mathbb{T} \setminus \{\overline{q}\}$ *выполнялось равенство*

Теорема

$$F(z) = i\beta \frac{\overline{q}z}{1-\overline{q}z} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ln \frac{1-\overline{a}_k z}{1-\overline{q}z} + \gamma_1 \frac{\overline{q}z}{(1-\overline{q}z)^2} +$$

$$+ \gamma_2 \int\limits_{\mathbb{T}\setminus\{\overline{q}\}} \left(\ln \frac{1-\varkappa z}{1-\overline{q}z} + i\,(\mathrm{Im}\{\varkappa q\})\, \frac{\overline{q}z}{1-\overline{q}z} \right) \frac{d\mu(\varkappa)}{1-\mathrm{Re}\{\varkappa q\}},$$

где под логарифмами понимаются непрерывные ветви, обращающиеся в нуль при $z=0$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ