ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫХ СЕМЕЙСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С. Ю. Граф, О. Р. Эйланголи

Тверь, Sergey.Graf@tversu.ru, EyelangoliOP@rambler.ru

Понятие линейной инвариантности класса функций было обобщено Т. Шейл-Смоллом [1] на семейтсва гармонических отображений. Рассмотрим произвольное линейно- и аффинно-инвариантное семейство $\mathcal{L}$ сохраняющих ориентацию локально однолистных гармонических отображений $f = h + \overline{g}$ единичного круга таких, что $f(0) = 0$, $h'(0) = 1$. Пусть $\mathcal{L}^0$ – подклас класса $\mathcal{L}$, для которого $g'(0) = 0$. В работах [2,3] с использованием уточненного определения порядка семейства доказан ряд дифференциальных неравенств, справедливых в $\mathcal{L}$. Назовем порядком семейства $\mathcal{L}^0$ число $\alpha_0 = \sup_{\mathcal{L}^0} |h''(0)/2|$. Символом β_0 обозначим $\sup_{\mathcal{L}^0} |g''(0)/2|$.

Теорема 1 [2]. *Пусть* $f = h + \overline{g} \in \mathcal{L},\ b_1 = g'(0)$. *Тогда для любого* $z,\ |z| = r,\ 0 \le r < 1$, *справедлива оценка производной Шварца функции* h :

$$|\{h, z\}| \le \frac{2\left(\alpha_0 + \beta_0 \frac{r+|b_1|}{1+|b_1|r}\right)^2 + 3\sqrt{3}\left(\alpha_0 + \beta_0 \frac{\sqrt{3}\,(r+|b_1|)+1+|b_1|r}{\sqrt{3}\,(1+|b_1|r)+r+|b_1|}\right)}{\left(1-r^2\right)^2}.$$

Теорема 2 [3]. *Пусть* $f = h + \overline{g} \in \mathcal{L},\ b_1 = g'(0)$. *Тогда для любого* $z,\ |z| = r,\ 0 < r < 1$, *справедливы следующие оценки кривизны* $k_f(z)$ *образа окружности* $\{|\zeta| = r\}$ *при отображении* f :

1). $$k_f(z) \le \frac{1+|b_1|}{(1-|b_1|)^2}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha_0+3/2}\frac{r^2+2r(\alpha_0+\beta_0)+1}{r}.$$

2.*a*). *Если* $0 < r \le \alpha_0 + \beta_0 - \sqrt{(\alpha_0+\beta_0)^2 - 1}$, *то*

$$k_f(z) \ge \frac{1-|b_1|}{(1+|b_1|)^2}\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha_0+3/2}\frac{r^2-2r(\alpha_0+\beta_0)+1}{r}.$$

2.*b*). *Если* $\alpha_0 + \beta_0 - \sqrt{(\alpha_0+\beta_0)^2 - 1} < r < 1$, *то*

$$k_f(z) \ge \frac{1+|b_1|}{(1-|b_1|)^2}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha_0+3/2}\frac{r^2-2r(\alpha_0+\beta_0)+1}{r}.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Sheil-Small T. *Constants for planar harmonic mappings* / T. Sheil-Small // J. London Math. Soc. 1990. V. 42. P. 237-248.

2. Граф С.Ю. *Теоремы искажения в семействах гармонических отображений* / С. Ю. Граф // Transactions of Academy of Science of Ukraine. В печати.

3. Граф С.Ю., Эйланголи О.Р. *Дифференциальные неравенства в линейно- и аффинно-инвариантных семействах гармонических отображений* / С. Ю. Граф, О. Р. Эйланголи // Известия вузов. Математика. В печати.