КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ[1]

С. А. Корольков, Е. С. Королькова

Волгоград, sergei.korolkov@rambler.ru, elena.korolkova@torus-consult.ru

Пусть M — связное некомпактное риманово многообразие без края и Ω — неограниченная область в M. Обозначим через $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ гладкое исчерпание M такое, что $B_k \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, ∂B_k и $\partial\Omega$ трансверсальны для всех k. Всюду далее рассматриваются гладкие исчерпания M с указанным свойством.

Пусть f_1 и f_2 — непрерывные на M функции. Будем говорить, что функции f_1 и f_2 *эквивалентны на* M *(на* Ω*, соотв.)*, и использовать обозначение $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$ ($f_1 \overset{\Omega}{\sim} f_2$, соотв.), если для некоторого гладкого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{M\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0$ ($\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{\Omega\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0$, соотв.). Отношение "$\sim$" является отношением эквивалентности и не зависит от выбора исчерпания M (см., например, [1]).

Будем говорить, что непрерывная на M функция f принадлежит *классу допустимых на* M *функций* и обозначать $f \in K(M)$, если на M найдется такая гармоническая функция u, что $u \sim f$. Многообразие M будем называть строгим, если емкостный потенциал некоторого компакта $B \subset M$ эквивалентен нулю (см., напр., [1]). В этом случае (т.е. когда B — компакт и M строгое), Лосевым А.Г., Мазепой Е.А. и Чебаненко В.Ю. (см. [1]) была доказана разрешимость задачи $\Delta u = 0$ на $M \setminus B$, $u|_{\partial B} = \varphi$, $u \overset{M}{\sim} f$ для любой непрерывной на ∂B функции φ и любой непрерывной функции $f \in K(M)$.

Пусть f — непрерывная на Ω функция, φ — непрерывная на $\partial\Omega$ функция. Будем говорить, что на Ω однозначно разрешима задача Дирихле с непрерывными граничными данными (f, φ), если на Ω существует и единственно решение следующей задачи

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta u = 0 \quad &\text{на } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi&, \\ u \overset{\Omega}{\sim} f&. \end{aligned} \right. \tag{1}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* M *— строгое,* $f \in K(M)$*,* φ *— непрерывная на* $\partial\Omega$ *функция такая, что* $\varphi \overset{\partial\Omega}{\sim} f$*, то на* Ω *однозначно разрешима задача Дирихле (1) с непрерывными граничными данными* (f, φ).

ЛИТЕРАТУРА

1. Losev A.G. *Unbounded solutions of the stationary Shrödinger equation on Riemannian Manifolds* / A.G. Losev, E.A. Mazepa, V.Y. Chebanenko // Computational methods and function theory. 2003. V. 3. N. 2. P. 443–451.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-97004-р_поволжье_а).