ПОВЕДЕНИЕ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОБЛАСТЕЙ ВБЛИЗИ ИХ ВЫПУКЛЫХ ГРАНИЧНЫХ ДУГ [1]

Е. П. Долженко Москва, eugen@ngcom.ru
С. В. Колесников Иваново, servikkol@rambler.ru

Пусть Γ — открытая достижимая жорданова дуга границы односвязной ограниченной области $G \subset \mathbb{C}$. Достижимость Γ означает существование односвязной области $\Omega(G, \Gamma) \subset G$ с такой жордановой границей $\partial\Omega(G, \Gamma)$, что $\overline{\Gamma} \subset \partial\Omega \subset G \cup \overline{\Gamma}$. Положительное направление на достижимой дуге Γ естественно задается обычным положительным направлением обхода области $\Omega(G, \Gamma)$ по ее границе $\partial\Omega(G, \Gamma)$. Открытую достижимую жорданову дугу Γ границы области G назовем выпуклой (соответственно, вогнутой) относительно G, если Γ выпукла наружу области $\Omega(G, \Gamma)$ (соответственно, вогнута внутрь неё). Далее, пусть $w = \varphi(z)$ — однолистное конформное отображение области G на открытый единичный круг D, $\psi(w) := \varphi^{-1}(w)$ — обратное отображение, $\gamma := \varphi(\Gamma)$.

Теорема 1. ($\mathbf{\Phi}$) *Если открытая достижимая дуга Γ выпукла относительно области G, то функция $\varphi(z)$ имеет в каждой точке $\zeta \in \Gamma$ производную $\varphi'(\zeta)$ относительно множества $\Omega(G, \Gamma) \cup \Gamma$, совпадающую с угловым пределом функции $\varphi'(z)$ в точке ζ изнутри $\Omega(G, \Gamma)$; при этом $\varphi'(z)$ ограничена на пересечении $\Omega \cup \Gamma$ с некоторой окрестностью точки ζ.* ($\mathbf{\Psi}$) *Если же дуга Γ вогнута, то функция $\psi(w)$ в каждой точке $\omega \in \gamma$ имеет производную $\psi'(\omega)$ относительно множества $D \cup \gamma$, равную угловому пределу функции $\psi'(z)$ в точке ω, и при этом $\psi'(w)$ ограничена на пересечении $D \cup \gamma$ с некоторой окрестностью этой точки.*

Введем еще одно определение. Пусть $\vartheta(\zeta)$ обозначает величину угла, образованного правой полукасательной (если таковая существует) к достижимой дуге Γ в точке $\zeta \in \Gamma$ с положительным направлением действительной оси. Очевидно, если дуга Γ выпукла относительно области G, то правая полукасательная к Γ существует в каждой точке $\zeta \in \Gamma$, а функция $\vartheta(\zeta)$ не убывает при движении точки ζ по Γ в положительном направлении прохождения дуги Γ (определяемого положительным направлением обхода жорданова контура $\partial\Omega(G, \Gamma)$), получая приращения $< 2\pi$ при прохождении через угловые точки кривой Γ; если же Γ вогнута, то $\vartheta(\zeta)$ не возрастает. Пусть ν — порожденная функцией $\vartheta(\zeta)$ мера типа Лебега–Стилтьеса на дуге Γ, $U_\nu(z)$ — ее логарифмический потенциал на комплексной плоскости: $U_\nu(z) = \displaystyle\int_\Gamma \ln \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\nu(\zeta)$.

Теорема 2. *Пусть открытая достижимая дуга Γ выпукла или вогнута относительно области G. В этих случаях справедливы следующие утверждения.* ($\mathbf{\Phi}$) *Функция $\varphi'(z)$ непрерывна относительно $\Omega(G, \Gamma) \cup \Gamma$ в какой-либо (достижимой) точке $\zeta_0 \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $-\infty < U_\nu(\zeta_0) \leq +\infty$ и при этом — в случае конечности $U_\nu(\zeta_0)$ — потенциал $U_\nu(z)$ непрерывен в точке ζ_0 вдоль Γ.* ($\mathbf{\Psi}$) *Функция $\psi'(w)$ непрерывна относительно $D \cup \gamma$*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке грантом №08-01-00648а РРФИ.

в точке $\omega_0 = \varphi(\zeta_0) \in \gamma$ *тогда и только тогда, когда* $-\infty \le U_\nu(\zeta_0) < +\infty$ *и — в случае конечности* $U_\nu(\zeta_0)$ *— потенциал* $U_\nu(z)$ *непрерывен в точке* ζ_0 *вдоль* Г.

При доказательстве этого результата используются теоремы 1Loc и 2Loc работы [1].

Непосредственным следствием теорем 1 и 2 является

Теорема 3. *Пусть* G *— ограниченная выпуклая область на плоскости* $\mathbb{C}$. *Тогда функция* $w = \varphi(z)$, *непрерывно продолженная* (по теореме Каратеодори) *до гомеоморфизма* $\overline{G}$ *на* $\overline{D}$, *имеет ограниченную производную* $\varphi'(z)$ *на* $\overline{G}$, *и в каждой точке* $\zeta \in \partial G$ *значение* $\varphi'(\zeta)$ *равно угловому пределу функции* $\varphi'(z)$ *изнутри* G *в этой точке. При этом функция* $\varphi'(z)$ *непрерывна относительно* $\overline{G}$ *в тех и только тех точках* $\zeta \in \partial G$, *в которых потенциал* $U_\nu(z)$ *конечен и непрерывен вдоль* ∂G, *или же в которых* $U_\nu(\zeta_0) = +\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долженко Е. П. *О граничной гладкости конформных отображений областей с негладкими границами* / Е. П. Долженко // ДАН. 2007. Т. 415. С. 155-159.