

**ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛУГРУППЫ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАНЫМИ
НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ**

В. В. Горяйнов

Волжский, goryainov_vv@hotmail.com

Пусть \mathfrak{F} – совокупность всех голоморфных в единичном круге \mathbb{D} функций f , принимающих значения из \mathbb{D} . Тогда \mathfrak{F} можно рассматривать как топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной сходимости. Под однопараметрической полугруппой в \mathfrak{F} понимается непрерывный гомоморфизм $t \rightarrow f^t$, действующий из аддитивной полугруппы \mathbb{R}^+ неотрицательных вещественных чисел в \mathfrak{F} . Однопараметрические полугруппы аналитических функций возникают во многих вопросах анализа и его приложений. Элементы $f^t, t \geq 0$, однопараметрической полугруппы представляют собой итерации функции f^1 и $f^t(z) \rightarrow q$ локально равномерно в \mathbb{D} при $t \rightarrow \infty$, где $q \in \overline{\mathbb{D}}$ и называется точкой Данжуа-Вольфа функций $f^t, t > 0$. Если $q \in \mathbb{D}$, то она является неподвижной точкой для функций $f^t, t > 0$. В случае, когда q является граничной точкой, т. е. лежит на единичной окружности \mathbb{T} , то в этой точке существуют угловые пределы

$$f^t(q) = \lim_{z \rightarrow q} f^t(z), \quad (f^t)'(q) = \lim_{z \rightarrow q} (f^t)'(z).$$

Кроме того, $f^t(q) = q$ и $0 < (f^t)'(q) \leq 1$, т. е. q является граничной неподвижной притягивающей точкой. В терминах точки Данжуа-Вольфа формулируется известный результат Берксона-Порты о виде инфинитезимальной образующей

$$v(z) = \left. \frac{\partial}{\partial t} f^t(z) \right|_{t=0}$$

однопараметрической полугруппы $t \rightarrow f^t$ в \mathfrak{F} .

Целью данной работы является описание однопараметрических полугрупп в \mathfrak{F} в случае, когда наряду с точкой Данжуа-Вольфа имеются другие неподвижные точки.

Теорема 1. *Для того чтобы голоморфная в \mathbb{D} функция v представляла собой инфинитезимальную образующую однопараметрической полугруппы $t \rightarrow f^t$ в \mathfrak{F} с точкой Данжуа-Вольфа $q \in \overline{\mathbb{D}}$ и неподвижными точками $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{T}$, в которых функции $f^t, t > 0$, имеют конечные угловые производные, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде*

$$v(z) = \frac{(q - z)(1 - \bar{q}z)}{\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{1 + \bar{a}_k z}{1 - \bar{a}_k z} + g(z)},$$

где $\lambda_k > 0, k = 1, \dots, n$, а g – голоморфная в \mathbb{D} функция с неотрицательной вещественной частью.

Получено также описание однопараметрических полугрупп с заданными неподвижными точками в терминах функциональных уравнений.