О МИНИМАЛЬНОМ РАССТОЯНИИ ПОЛЮСОВ НАИПРОСТЕЙШЕЙ ДРОБИ ДО КОМПАКТА, НА КОТОРОМ ОНА ОГРАНИЧЕНА

О. Н. Косухин
Москва, kosuhin_oleg@mail.ru

Наипростейшей дробью степени n называется рациональная функция комплексного переменного z вида $R_n(z) = \sum_{k=1}^{n} 1/(z - a_k)$, где $\{a_k\}$ — её полюсы (не обязательно различные) на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть $d(K, R_n)$ — обычное (евклидово) расстояние между множеством $\{a_k\}$ и заданным замкнутым множеством $K \subset \mathbb{C}$ $(K \neq \mathbb{C})$, $d_n(K, M)$ — infimum величин $d(K, R_n)$ по всем наипростейшим дробям R_n, для которых $|R_n(z)| \leq M \; \forall\, z \in K$. Представляет интерес задача об оценке величин $d_n(K, M)$ при $n \to \infty$. В частном случае $K = (-\infty, +\infty)$ эту задачу поставил Е.А. Горин в 1962 году. Её решением занимались Е.А. Горин (1962), Е.Г. Николаев (1965), А.О. Гельфонд (1966), В.Э. Кацнельсон (1967), но наибольших успехов в случае, когда K прямая или окружность комплексной плоскости, добился В.И. Данченко [1], который не только впервые доказал стремление величин $d_n(K, M)$ к нулю с ростом n, но и нашел точный порядок этих величин. В общем случае вопрос об оценке величин $d_n(K, M)$ остается открытым.

Ниже компакт K называется спрямляемым, если существует такая величина $d(K) > 0$, что любые две его точки можно соединить кривой $l \subset K$ длины $|l| \leq d(K)$.

Теорема. *Для любого спрямляемого компакта $K \subset \mathbb{C}$ при каждом фиксированном $A > 0$ имеет место асимптотическое неравенство*

$$d_n(K, A) \geq 4c(K)\frac{\log^2 n}{n^2}(1 + o(1)) \quad (n \to \infty),$$

обращающееся в равенство в случае, если K — какой-либо отрезок. Здесь $c(K)$ — гармоническая (логарифмическая) ёмкость компакта K.

Работа поддержана грантом 08-01-00648а РФФИ.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Данченко В. И. *Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей* / В. И. Данченко // Матем.сб. 1994. **185**, N 8. С. 63-80.