ОБ ОЦЕНКЕ ДЛИН ЛЕМНИСКАТ

О. Н. Косухин
Москва, kosuhin_oleg@mail.ru

Всюду ниже $\mathbb{C}$ обозначает комплексную плоскость, $P_n(z) := z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_0$ — алгебраический многочлен степени n переменного $z \in \mathbb{C}$ с комплексными коэффициентами c_j $(j = 0, \ldots, n-1)$ и старшим коэффициентом 1. Для любого $C = \mathrm{const} > 0$ линия уровня модуля этого многочлена $L(P_n, C) := \{z : |P_n(z)| = C\}$ называется *лемнискатой* многочлена $P_n(z)$. Пусть $|L(P_n, 1)|$ — длина лемнискаты $L(P_n, 1)$, $\lambda_n := \sup\{|L(P_n, 1)| : P_n\}$. В 1958 году в работе [1] П. Эрдош, Ф. Герцог и Г. Пиранян выдвинули гипотезу о том, что при каждом натуральном n величина λ_n совпадает с длиной $|L(P_n^*, 1)|$ лемнискаты $L(P_n^*, 1)$ многочлена $P_n^*(z) := z^n - 1$. Нетрудно показать, что при $n \to \infty$ верно асимптотическое равенство $|L(P_n^*, 1)| = 2n + 4\log 2 + o(1)$. В 1960 году независимо от работы [1] задача об оценке величин λ_n возникла в диссертации Е. П. Долженко [2] (см. также [3]) в связи с задачами теории рациональных приближений. Для любого натурального n им было получено точное по порядку величин λ_n неравенство $\lambda_n \le 4\pi n$. К настоящему времени лучшим из опубликованных является неравенство $\lambda_n \le 2\pi n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, полученное В. И. Данченко в [4] (это неравенство является точным при $n = 1$). Следующая теорема улучшает оценку В. И. Данченко при всех $n \ge 7$.

Теорема. *При всех $n \ge 2$ имеет место неравенство*

$$\lambda_n \le \pi\left(n + \sqrt{n\log(4\pi n^2)}\right).$$

Работа поддержана грантом 08-01-00648а РФФИ.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Erdös P. *Metric properties of polynomials*/ P. Erdös, F. Herzog, G. Piranian // J. Analyse Math. 1958. **6**. P. 125-148.

2. Долженко Е. П. *Дифференциальные свойства функций и некоторые вопросы теории приближений*/ Е. П. Долженко // Канд. дисс., Москва, МГУ, 1960.

3. Долженко Е. П. *Некоторые метрические свойства алгебраических гиперповерхностей*/ Е. П. Долженко // Изв. АН СССР, сер. матем. 1963. 27. N2. С. 241-252.

4. Данченко В. И. *Длины лемнискат. Вариации рациональных функций* / В. И. Данченко //Матем.сб. 2007. **198**, N 8. С. 51-58.