О СПЕКТРАЛЬНОМ СИНТЕЗЕ В ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ НА $\mathbb{R}$

С.С. Платонов (Петрозаводск)
platonov@psu.karelia.ru

Для любого $k > 0$ обозначим через L^2_k банахово пространство, состоящее из всех комплекснозначных функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{2,k} := \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, e^{-k|x|} \, dx \right)^{1/2}.$$

Функциональное пространство

$$L^2_* := \bigcup_{k>0} L^2_k$$

снабжается топологией индуктивного предела банаховых пространств L^2_k. Будем называть замкнутое линейное подпространство $H \subseteq L^2_*$ инвариантным подпространством (ИПП), если из $f(x) \in H$ следует $f(x+t) \in H$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Простейшими примерами инвариантных подпространств служат следующие конечномерные подпространства

$$V_{\lambda,r} := Lin\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{r-1}e^{\lambda x}\},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N}$. Если H — нетривиальное ИПП в L^2_* (т. е. $H \neq \{0\}$ и $H \neq L^2_*$), то будем говорить, что комплексное число λ принадлежит спектру ИПП H, если $e^{\lambda x} \in H$ и при этом спектральной кратностью числа λ называется натуральное число

$$r_\lambda := \max\{r : V_{\lambda,r} \subseteq H\}.$$

Пусть $\sigma(H)$ — спектр ИПП H, причем пусть каждое число λ входит в $\sigma(H)$ с кратностью r_λ.

Теорема 1. *Любое нетривиальное инвариантное подпространство $H \subseteq L^2_*$ однозначно определяется по своему спектру $\sigma(H)$, а именно*

$$H = \overline{\sum_{\lambda \in \sigma(H)} V_{\lambda, r_\lambda}} \tag{1}$$

(черта означает замыкание в L^2_*).

С учетом формулы (1) говорят, что любое ИПП $H \subseteq L^2_*$ допускает спектральный синтез. Отметим, что можно получить и полное описание всевозможных спектров инвариантных подпространств в L^2_*.

Полное изложение этих результатов можно прочитать в статье автора “Спектральный синтез в некоторых функциональных топологических векторных пространствах”, которая будет опубликована в журнале “Алгебра и анализ”.