ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СЕН-ВЕНАНА О КРУЧЕНИИ ПОЛОГО СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

В. В. Соболев, А. А. Молчанов

Ростов-на-Дону, sobolev@aaanet.ru

Рассматривается классическая задача Сен-Венана о кручении полого стержня, скручиваемого моментами силы, приложенными к концам стержня [1]. Пусть поперечное сечение однородного стержня представляет собой ограниченную двусвязную область D в плоскости комплексного переменного $w=u+iv$, Γ^+ и Γ^- – соответственно внешняя и внутренняя граничные компоненты области D, являющиеся замкнутыми кусочно-гладкими жордановыми кривыми без точек возврата.

Решение задачи Сен-Венана сводится к краевой задаче Дирихле для уравнения Лапласа: $\Delta\psi = 0,\ \psi|_{\Gamma^+} = h(\omega)$, $\psi|_{\Gamma^-} = h(\omega)+C$, где $h(\omega)=|\omega|^2/2$, $\omega\in(\Gamma^+\cup\Gamma^-)$. Постоянная C должна быть выбрана так, чтобы выполнялось условие Прандтля $\int_{\Gamma^-}\partial\psi/\partial n dl = 0$.

С помощью конформного отображения поставленная краевая задача редуцируется к задаче в круговом кольце. Пусть $z=g(w)$ – аналитическая функция, осуществляющая конформное отображение области D на круговое кольцо $K_q=\{z: q<|z|<1\}$ с некоторым значением q, $0<q<1$, и $w=f(z)$ – обратная функция. Тогда для гармонической в K_q функции $\psi^*(z)=\psi(f(z))$ имеем

$$\psi^*(re^{it}) = A\ln r + a_0^+ + \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(K(r,t,\tau)h^+(\tau) - K(qr,t,\tau)h^-(\tau)\right)d\tau,\quad q\le r\le 1. \tag{1}$$

Здесь $K(\rho,t,\tau)=\sum\limits_{n=\pm1,\pm2,\ldots}\rho^n\left(1-q^{2n}\right)^{-1}\cos n(t-\tau)$, $h^+(\tau)=h(f(e^{i\tau}))$, $h^-(\tau)=h(f(qe^{i\tau}))$, $A=\left(C+a_0^- - a_0^+\right)/\ln q$, $a_0^+=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}h^+(\tau)d\tau$, $a_0^-=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}h^-(\tau)d\tau$. Условие Прандтля приводит к равенству $A=-2^{-1}\pi^{-2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\left(1-q^{2n}\right)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}h^-(\tau)\cos n(t-\tau)d\tau\right)dt.$ Для широкого класса (в частности, гладких) контуров Γ^- получаем $A=0$, и тогда $C=a_0^+ - a_0^-$.

Геометрическая жёсткость стержня определяется равенством

$$H = 2\iint_D\psi\, dudv + \frac{1}{3}\oint_{\Gamma^+}\left(v^3du - u^3dv\right) - \frac{1}{3}\oint_{\Gamma^-}\left(v^3du - u^3dv\right) - 2CS(\Gamma^-), \tag{2}$$

где $S(\Gamma^-)$ – площадь области, ограниченной контуром Γ^-.

Метод реализуется двумя компьютерными программами: 1) *AltRingDir* – построение конформного отображения $g: D\to K_q$ по методу альтернации [2] и редукция краевой задачи Дирихле к задаче в кольце [3]; 2) *S-VenantRing* – определение постоянных A и C и вычисление значения $\psi(w)=\psi^*(z)$ в точке $w\in D$, $z=g(w)$, согласно (1), а также определение крутильной жёсткости стержня H с применением метода Монте–Карло для вычисления интеграла по области D в (2).

Опробование метода подтвердило его эффективность.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука. 1975.

2. Фильчаков П.Ф. Численные и графические методы математики. Киев: Наукова Думка. 1970.

3. Соболев В.В., Ищенко Н.В. Программа численного построения конформного отображения ограниченной двусвязной области на круговое кольцо и обратного отображения. Ростов н/Д, РГАСХМ. Зарегистрир. ГОФАП (ВНТИЦ), № 50200100349. 2001.