ОЦЕНКА КРИВИЗНЫ ОБРАЗОВ ОКРУЖНОСТЕЙ В ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫХ СЕМЕЙСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С. Ю. Граф

Тверь, Sergey.Graf@tversu.ru

Рассмотрим произвольное линейно- и аффинно-инвариантное семейство $\mathcal{L}$ сохраняющих ориентацию локально однолистных гармонических отображений f единичного круга таких, что $f(0) = 0$, $f_z(0) = 1$. Пусть $\mathcal{L}^0$ – подклас класса $\mathcal{L}$, для которого $f_{\overline{z}}(0) = 0$. Назовем порядком семейства $\mathcal{L}^0$ число $\alpha_0 = \sup_{\mathcal{L}^0} |f_{zz}(0)/2|$. Символом β_0 обозначим $\sup_{\mathcal{L}^0} |f_{\overline{z}\overline{z}}(0)/2|$. Известно, что $\beta_0 \leq \frac{1}{2}$. Некоторые свойства линейно- и аффинно-инвариантных семейств гармонических отображений приведены в [1, 2].

Теорема. *Пусть* $f = h + \overline{g} \in \mathcal{L}^0$. *Тогда для любого* r, $0 < r < 1$, *справедливы следующие оценки кривизны* $k(r)$ *линии* $\gamma_r = f(|z| = r)$:

1). Оценка сверху.

$$k(r) \leq \frac{(1+r)^{\alpha_0+1}}{(1-r)^{\alpha_0+2}} \cdot \frac{r^2 + 2r(\alpha_0 + \beta_0) + 1}{r}.$$

2). Оценка снизу.

$$k(r) \geq \begin{cases} \dfrac{(1-r)^{\alpha_0+3/2}}{(1+r)^{\alpha_0+3/2}} \cdot \dfrac{r^2 - 2r(\alpha_0+\beta_0)+1}{r}, \\ \qquad \text{если } r \leq \alpha_0 + \beta_0 + \sqrt{(\alpha_0+\beta_0)^2 - 1}; \\ \dfrac{(1-r)^{\alpha_0+1}}{(1+r)^{\alpha_0+2}} \cdot \dfrac{r^2 - 2r(\alpha_0+\beta_0)+1}{r}, \\ \qquad \text{если } \alpha_0 + \beta_0 + \sqrt{(\alpha_0+\beta_0)^2 - 1} < r < 1. \end{cases}$$

Аналогичные оценки могут быть получены и в семействе $\mathcal{L}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Sheil-Small T. *Constants for planar harmonic mappings* / T. Sheil-Small // J. London Math. Soc. 1990. V. 42. P. 237-248.

2. Граф С.Ю. *Точная оценка якобиана в линейно- и аффинно-инвариантных семействах гармонических отображений* / С. Ю. Граф // Труды Петр ГУ. Серия математика. 2007. Вып. 14. С. 31-38.