# О СИЛЬНО ВЫПУКЛОМ АНАЛИЗЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ

**Е. С. Половинкин**
Долгопрудный, polovinkin@mail.mipt.ru

Следуя [1], выпуклое замкнутое множество $M$ из банахова пространства $E$ назовем *порождающим множеством*, если для любого непустого множества $A$, представимого в виде $A = \bigcap\limits_{x\in X}(M+x)$ (при некотором $X$), найдется выпуклое замкнутое множество $B \subset E$ такое, что $\overline{A+B} = M$ (где $A+B = \{a+b \,|\, a \in A,\, b \in B\}$ - сумма Минковского, а черта сверху означает замыкание). Соответственно для каждого порождающего множества $M$ всякое непустое множество $A$ указанного выше вида назовем $M$- *сильно выпуклым множеством*. Нами доказано [2], что для множеств из банаховых пространств выполнение условия о том, что множество $M$ является порождающим множеством, является необходимым и достаточным условием наличия усиленной двойственности. Речь идет о том, что множество $A$ принадлежит классу, определяемому заданным порождающим множеством $M$, тогда и только тогда, когда вместе с любой парой своих точек множество $A$ содержит и усиленную выпуклую оболочку этих точек, т.е. множество, получаемое в результате пересечения всевозможных линейных сдвигов $M+x$ множества $M$, содержащих указанную пару точек. Исследованы общих свойства $M$- сильно выпуклых множеств.

Определено понятие $M$- сильно выпуклой оболочки множества и исследованы её свойства. Показано [2], что в случае, когда порождающее множество $M$ ограничено, оператор взятия $M$ -сильно выпуклой оболочки удовлетворяет условию Липшица в метрике Хаусдорфа. Получено одно обобщение теоремы Крейна – Мильмана для $B_R(0)$- сильно выпуклых множеств из гильбертова пространства.

Одним из приложений сильно выпуклого анализа явилось решение с его помощью проблемы построения некоторого тела постоянной ширины $d > 0$, содержащего заданное ограниченное множество того же диаметра $d$, получена [3] явная формула такого тела постоянной ширины. Эта формула справедлива для множеств из банаховых пространств, в которых единичный шар является порождающим множеством, в частности, для гильбертовых пространств. Получен [4] критерий единственности дополнения произвольного ограниченного множества до тела постоянной ширины. В случае неединственности дополнения предложен алгоритм описания некоторого семейства тел постоянной ширины, содержащих исходное множество того же диаметра.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант №07-01-00156).

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Половинкин Е.С. *О новых классах порождающих множеств* / Е. С. Половинкин // Некот. пробл. фунд. и прикл. матем., Междувед. сб., МФТИ. М. 1998. С. 81-93.
2. Половинкин Е.С., Балашов М.В., *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*/ Е.С.Половинкин, М.В.Балашов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
3. Половинкин Е.С., *О телах постоянной ширины* / Е.С.Половинкин // Докл. РАН. 2004. Т. 397. № 3. С. 313-315.
4. Половинкин Е.С., Сиденко С.В. *Дополнение множеств до тел постоянной ширины* / Е.С.Половинкин, С.В.Сиденко // Уч. зап. Казан. гос. ун-та. 2006. Т. 148, № 2. С. 132-143.