ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Д.С. Теляковский (Москва)
dtelyakov@mail.ru

Если суммируемая функция $u(z) = u(x, y)$ удовлетворяет в каждой точке области уравнению Лапласа, то $u(z)$ гармонична [1]. Оказывается, что уравнение Лапласа можно понимать в обобщенном смысле.

Пусть точка z лежит на луче l, исходящем из точки ξ и h — ее координата на луче: $h = |z - \xi|$. Будем говорить, что функция $u(z)$ дважды дифференцируема в ξ вдоль l в смысле Пеано, если выполнено условие

$$u(z) = u(\xi) + a_l h + \frac{1}{2} b_l h^2 + o(h^2), \quad h \to 0,\ h > 0.$$

Теорема. Пусть из каждой точки ξ области G исходят три луча $l_j(\xi)$, $j = 1, 2, 3$, углы наклона которых к оси Ox равны $\alpha_j(\xi)$ (отсчитываются против часовой стрелки и зависят, вообще говоря, от ξ), причем углы между любыми двумя лучами больше $\pi/2$. Пусть функция $u(z)$ дважды дифференцируема в ξ вдоль каждого из этих лучей в смысле Пеано, ее производные a_j, b_j удовлетворяют соотношениям

$$a_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + a_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + a_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 0;$$
$$b_1 \sin 2(\alpha_2 - \alpha_3) + b_2 \sin 2(\alpha_3 - \alpha_1) + b_3 \sin 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0,$$

и функция $|u(z)|^2$ суммируема в G. Тогда функция $u(z)$ гармонична в G.

Литература

1. Д. С. Теляковский. Об одном обобщении теоремы Лумана–Меньшова. Матем. заметки. 1986. Т. 39. С. 539–549.