О. Н. Косухин (Москва, kosuhin_oleg@mail.ru)

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ГЛАДКИХ НА ОТРЕЗКАХ И КРУГАХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ ПОСРЕДСТВОМ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

Наипростейшей дробью степени n называется рациональная функция вида $R_n(z) = \sum_{k=1}^{n} 1/(z-a_k) = P'(z)/P(z)$, где $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ — точки комплексной плоскости $\mathbf{C}$, а $P(z) = c(z-a_1)\cdot\ldots\cdot(z-a_n)$, $c \in \mathbf{C}$, — любой многочлен с нулями в этих точках.

Пусть K — отрезок $\Delta_d = [-d, d]$ или круг $D_d = \{z : |z| < d\}$ комплексной плоскости; $CA(K)$ — класс всех функций, непрерывных на K и аналитических во внутренних точках K; $\rho_n(f, K)$ — наименьшее равномерное уклонение функции f от наипростейших дробей степени не выше n на K. Для любых чисел $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $\beta \in (0, 1]$ определим $\mathrm{Lip}^{k+\beta}(K)$ как класс всех функций $f \in CA(K)$, имеющих непрерывную k-ю производную $f^{(k)}$ на K (считаем $f^{(0)} \equiv f$), для которых имеет место неравенство $\sup\{|f(z+h) - f(z)|/|h|^{\beta} : z, z+h \in K\} < +\infty$, а $\mathrm{Z}^k(K)$ — как класс всех непрерывных на K, имеющих непрерывную на нем k-ю производную $f^{(k)}$, для которой неравенство $|f^{(k)}(z+h) - 2f^{(k)}(z) + f^{(k)}(z-h)| \leq Ch$ выполнено с некоторой положительной константой $C = C(f, k)$ для всех $h > 0$ и $z+h, z, z-h \in K$. Имеют место следующие аналоги известных теорем С.Н. Бернштейна, А. Зигмунда и В.К. Дзядыка (см. [1]) из теории полиномиальных приближений

Теорема 1. *Функция $f \in CA(D_d)$ тогда и только тогда принадлежит классу $\mathrm{Lip}^{k+\beta}(D_d)$ при $\beta \in (0,1)$, и классу $\mathrm{Z}^k(D_d)$ при $\beta = 1$, когда условие $\rho_n(f, D_d) \leq C/n^{k+\beta}$ выполнено при любом n с некоторой константой $C = C(f, D_d, \beta) > 0$.*

Теорема 2. *Для того, чтобы для функции $f \in CA(\Delta_d)$ при каждом натуральном n имело место неравенство $\rho_n(f, K) \leq C/n^{k+\beta}$ с некоторой константой $C = C(f, d, k, \beta) > 0$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\hat{f}(t) := f(d\cos t)$ принадлежала классу $\mathrm{Lip}^{k+\beta}(\Delta_d)$ при $\beta \in (0,1)$, и классу $\mathrm{Z}^k(\Delta_d)$ при $\beta = 1$.*

Теорема 3. *Функция $f \in CA(\Delta_d)$ тогда и только тогда принадлежит классу $\mathrm{Lip}^{k+\beta}(\Delta_d)$ (классу $\mathrm{Z}^k(\Delta_d)$), где $0 < \beta < 1$, когда для некоторого числа $N > 0$ при каждом натуральном $n \geq N$ нашлась наипростейшая дробь $R_n(z)$ порядка не выше n такая, чтобы при всех $x \in \Delta_d$ выполнялось неравенство*

$$|f(x) - R_n(x)| \leq A\, r_n^{k+\beta}(x) \qquad (|f(x) - R_n(x)| \leq A\, r_n^{k+1}(x)),$$

где $A = A(f, d, k, \beta) > 0$ $(A = A(f, d, k) > 0)$ — постоянная, которая не зависит ни от x, ни от n, и $r_n(x) := \sqrt{d^2 - x^2}/n + 1/n^2$.

Работа поддержана грантом 05-01-00962 РФФИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дзядык В.К. *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*// М.: "Наука", 1977.