

О. Н. Косухин (Москва, kosuhin_oleg@mail.ru)

ОБ ОЦЕНКЕ УКЛОНЕНИЯ НАИПРОСТЕЙШЕЙ ДРОБИ ПАДЕ
ОТ ФУНКЦИИ КЛАССА H_1 ХАРДИ
В ТОЧКАХ ЕДИНИЧНОГО КРУГА

Наипростейшей дробью степени n называется рациональная функция вида $R_n(z) = \sum_{k=1}^n 1/(z - a_k) = P'(z)/P(z)$, где $\{a_k\}_{k=1}^n$ — точки комплексной плоскости \mathbf{C} , а $P(z) = c(z - a_1) \cdot \dots \cdot (z - a_n)$ ($c \in \mathbf{C}$) — любой многочлен с нулями в этих точках. При $n = 0$ по определению считаем $R_n(z) \equiv 0$. Для каждого $n \geq 1$ наипростейшим рациональным дифференциалом порядка $n - 1$ функции $f(z)$ в точке b , в некоторой односвязной окрестности U которой $f(z)$ однозначна и аналитична, или наипростейшей дробью Паде n -ого порядка функции $f(z)$ в точке b , следуя Е.П. Долженко, назовем наипростейшую дробь $R_n(f, b; \cdot)$ степени не выше n со свойством: $f(z) - R_n(f, b; z) = O((z - b)^n)$ при $z \rightarrow b$. В работах [1] и [2] независимо доказано существование и единственность такой дроби.

Обозначим через H_1 класс Харди всех аналитических в единичном круге $D := \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z)$, для которых конечна норма $\|f\|_{H_1} := \sup \left\{ \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta : 0 < r < 1 \right\}$. В работе [1] В.И. и Д.Я. Данченко доказали для функций f , аналитических в единичном круге D и имеющих ограниченные по модулю абсолютной положительной константой коэффициенты ее ряда Тейлора с центром в нуле, что неравенство $|R_n(f, 0; re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})| \leq C n r^n / (1 - r)$ имеет место для некоторой положительной константы C при любом натуральном n и $z = re^{i\theta} \in D$. Следующая теорема является уточнением этого результата в частном случае $f \in H_1$.

Теорема 1 Пусть $f \in H_1$, $z = re^{i\theta} \in D$. Тогда неравенство

$$|R_n(f, 0; z) - f(z)| \leq \frac{r^n \exp\{(4/3)\|f\|_{H_1}\} \cdot (\|f\|_{H_1} + 2\pi r |f(z)|)}{2\pi(1 - r - r^{n+1} \exp\{(4/3)\|f\|_{H_1}\})}$$

выполнено при всех n , для которых правая его часть определена и положительна.

Работа поддержана грантом 05-01-00962 РФФИ.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Данченко В. И., Данченко Д. Я. *О приближении наипростейшими дробями* — Матем. заметки. 2001. **70**, вып. 4. — С. 553–559.
2. Косухин О. Н. *Об аппроксимационных свойствах наипростейших дробей* — Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Матем. Механ. 2001, N 4. — С. 54–59.