Гладкость функции и скорость приближения

О. В. Сильванович, Н. А. Широков
Санкт-Петербург, olamamik@gmail.com

Рассмотрим E - подмножество положительной полуоси $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ = [0;\infty)$, состоящее из дизъюнктных отрезков $I_\nu, 1 \leqslant \nu \leqslant k, k \geqslant 1, I_\nu = [a_\nu, b_\nu], a_1 = 0$ и луча $I_{k+1} = [a_{k+1}, \infty)$, $a_{k+1} > b_k$; $\omega(x)$ - возрастающая непрерывная функция типа модуля непрерывности на $\mathbb{R}^+$, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_0^y \frac{\omega(x)}{x}dx + y\int\limits_y^\infty \frac{\omega(x)}{x^2}dx \leqslant c_0\omega(y), \quad y > 0 \tag{1}$$

где c_0 не зависит от y;

$H^r_\omega(E)$ -пространство комплекснозначных функций f на множестве E, удовлетворяющих условию

$$|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)| \leqslant c_f\omega(|x-y|), \quad x, y \in E, \tag{2}$$

с нормой

$$\|f\|_{r,\omega} = |f(0)| + \sum_{\nu=1}^r |f^{(\nu)}(0)| + \sup_{x,y\in E\ x\neq y} \frac{|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)|}{\omega(|x-y|)} \tag{3}$$

В качестве набора приближающих на множестве E функций рассмотрим совокупности целых функций F_σ порядка $\frac{1}{2}$ и меняющегося типа $\sigma > 0$ с нормой, задаваемой равенством:

$$\|F_\sigma\|_{C^{(r,\omega)}_\sigma} = \sup_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+} \frac{|F_\sigma(z)|\cdot e^{-\sigma|Im\sqrt{z}|}}{1+|z|^r\omega(|z|)+\sigma^{-2r}\omega(\sigma^{-2})} \tag{4}$$

Для того, чтобы определить шкалу приближения, согласованную с нормами $(3), (4)$, потребуется результат, приведённый в [1].

Лемма. *Существует единственная гармоническая в $\mathbb{C}\setminus E$ функция, удовлетворяющая условиям:*

$$\varphi_E(z) > 0,\, \varphi_E(z) \to 0, \quad \text{если} \quad z \to z_0 \in E,$$

$$\varphi_E(z) \leqslant c_1\left(1+|z|^{\frac{1}{2}}\right) \text{ и } \varphi_E(x)|x|^{-\frac{1}{2}} \to 1 \text{ при } x \to -\infty.$$

Пусть теперь

$$L_h = \{z \in \mathbb{C}\setminus E : \varphi_E(z) = h\}, \quad h > 0, \tag{5}$$

$$\rho_h(z) = dist(z, L_h), \quad z \in \mathbb{C} \tag{6}$$

В [1] установлено, что если $f \in H^r_\omega(E)$, то для любого $\sigma > 0$ найдётся функция $F_\sigma \in C^{(r,\omega)}_\sigma$ такая, что

$$\|F_\sigma\|_{C^{(r,\omega)}_\sigma} \leqslant c_2\|f\|_{r,\omega} \text{ и}$$

$$|f(x) - F_\sigma(x)| \leqslant c_3\|f\|_{r,\omega}\rho^r_{\frac{1}{\sigma}}(x)\omega\left(\rho_{\frac{1}{\sigma}}(x)\right), \quad x \in E,$$

то есть для рассматриваемого математического контекста установлена прямая теорема приближения.

Сформулируем и докажем обратную теорему приближения, которая согласуется с приведённой выше прямой теоремой.

Теорема. *Пусть пространство целых функций* $C_\sigma^{(r,\omega)}$ *определено в (4), где* $\omega(x)$ *удовлетворяет условию (1), шкала функций* $\rho_h(z)$ *определена в (5) и (6). Пусть* $f \in C(E)$ *и предположим, что существуют постоянные* c_4 *и* c_5*, такие, что для всякого* $\sigma > 0$ *найдётся функция* $F_\sigma \in C_\sigma^{(r,\omega)}$*, такая, что*

$$\|F_\sigma\|_{C_\sigma^{(r,\omega)}} \leqslant c_4 \tag{7}$$

и

$$|f(x) - F_\sigma(x)| \leqslant c_5 \rho^r_{\frac{1}{\sigma}}(x)\omega\left(\rho_{\frac{1}{\sigma}}(x)\right), \quad x \in E,\ r \geqslant 0. \tag{8}$$

Тогда $f \in H^r_\omega(E)$ *и* $\|f\|_{r,\omega} \leqslant c_6, \quad c_6 = c_6(c_4, c_5, E, r)$.

Доказательство теоремы проводится с использованием подхода, впервые применённого в обратных теоремах Е.М. Дынькиным [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1.Сильванович О. В. *Приближение целыми функциями на подмножествах полуоси* / О.В. Сильванович ,Н.А. Широков //Зап.научн.семин. ПОМИ. 2006. Т. 337. С. 233-237.

2.Dyn'kin E. M. *The rate of polynomial approximation in the complex domain* / E. M. Dyn'kin // Springer Lecture Notes in Math. 1981. V. 864. P.90-142.